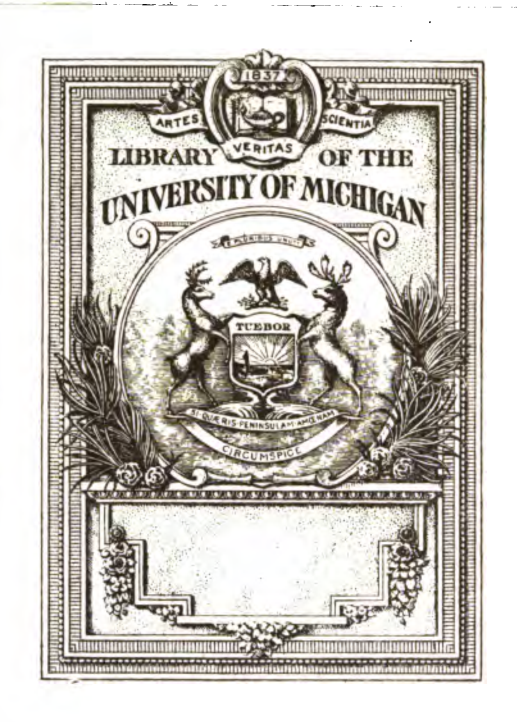

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

GRUNDRISS

DER ALLGEMEINEN

MECHANISCHEN PHYSIK.

DIE WICHTIGSTEN LEHRSÄTZE
DER MECHANIK FESTER, FLÜSSIGER UND GASFÖRMIGER KÖRPER,
DER MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE UND DER POTENTIALTHEORIE,
NEBST EINER MATHEMATISCHEN EINLEITUNG.

FÜR STUDIRENDE
AN HOCHSCHULEN UND FÜR LEHRAMTSCANDIDATEN

BEARBEITET VON

PHIL. DR. Adalbert VON WALTENHOFEN,

K. K. ORD. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER DEUTSCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU PRAG ETC.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

Vorrede.

In dem Geleitsbriefe, welchen ich diesem Buche mitgebe, habe ich vor Allem über die Auswahl und Behandlung des Lehrstoffes Einiges zu sagen, insofern ich dabei von der gewöhnlichen Einrichtung eines Lehrbuches einigermassen abgewichen bin.

Es ist nämlich bisher allgemein üblich gewesen, selbst in solchen Lehrbüchern, welche speciell für Studirende an Hochschulen bestimmt sind, auf die schon an den Mittelschulen gelehrten Anfangsgründe mehr oder weniger ausführlich nochmals zurückzukommen, und zwar nicht nur in jenen Fällen, in welchen dieser Vorgang durch eine wesentlich andere oder wissenschaftlich strengere Behandlungsart gerechtfertigt war, sondern vielfach auch dort, wo die Wiederholung keine neuen Gesichtspunkte dargeboten hat. So findet man z. B. häufig in Lehrbüchern der bezeichneten Art gewisse Lehrsätze der Mechanik ganz in derselben elementaren Weise wiedergegeben, in welcher sie bereits an Gymnasien und Realschulen allenthalben gelehrt zu werden pflegen; desgleichen findet man bekannte Apparate (z. B. die Wage, Centrifugalmaschine, den Haldat'schen Apparat, die hydraulische Presse, Barometer, Luftpumpen, Gasometer u. s. w.) so wie bekannte Fundamentalversuche (z. B. die Nachweisung des Gewichtsverlustes der Körper in einer Flüssigkeit oder in der Luft, des Luftdruckes u. s. f.) neuerdings besprochen, ohne dass etwas wesentlich Neues darüber gesagt würde.

So zweckmässig, ja unerlässlich auch beim Unterrichte an der Hochschule gewisse Wiederholungen aus dem Bereiche des vorausgegangenen Unterrichtes sind, um die nothwendigen Vorkenntnisse, welche man eigentlich sollte voraussetzen können, welche aber leider nur allzuoft in unzureichendem Masse an-

getroffen werden, sicher zu stellen und an dieselben das Neue zusammenhängend anzuknüpfen, so schien es mir doch nicht passend, solche Wiederholungen in ein für Hochschulen bestimmtes Buch aufzunehmen und den Umfang desselben dadurch etwa zu verdoppeln.

Ich muss es vielmehr dem Leser anheimstellen, was ihm an Vorkenntnissen aus der Mittelschule fehlen sollte, in Lehrbüchern für diese Unterrichtsstufe nachzuholen; in das vorliegende Buch habe ich grundsätzlich nichts aufgenommen, was nicht an sich oder doch wenigstens vermöge der Behandlungsart eine Ergänzung oder Erweiterung der vorauszusetzenden Kenntnisse mit sich bringt. Selbstverständlich konnte aber dabei die Grenze nicht enger gezogen werden, als mit Ausschluss desjenigen, was zuverlässig an allen Mittelschulen gelehrt wird.

Manches wird man durch eine etwas ausführlichere Darstellung bevorzugt finden. Die Veranlassung dazu war entweder die Rücksicht auf wichtige praktische Anwendungen (Abweichung der Geschosse, Aräometer, barometrische Höhenmessung u. s. w.) oder die Erfahrung, dass die betreffenden Lehrsätze in den Mittelschulen in der Regel nicht genügend angeeignet werden. Dies gilt z. B. insbesondere vom Gay-Lussac'schen und noch mehr vom vereinigten Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze und dessen Anwendung bei der Reduction eines Gasvolumens auf einen anderen Druck und eine andere Temperatur. — Die Verschiedenheit der Schwere auf der Erdoberfläche findet man in Lehrbüchern nicht selten mangelhaft, ja selbst incorrect behandelt; sie hat daher schon aus diesem Grunde eine Wiederholung und Richtigstellung erheischt.

Soviel über die Auswahl des Lehrstoffes. Was die Behandlungsart desselben betrifft, bin ich von der Ansicht ausgegangen, dass die der Allgemeinheit der Resultate, dem Ueberblicke ihres Zusammenhanges und der Tiefe des wissenschaftlichen Verständnisses so abträgliche Einschränkung auf die Mittel der Elementar-Mathematik, als dem Standpunkte der Hochschule nicht angemessen, unbedingt aufgegeben werden muss. Ein höchst verdienstlicher Fortschritt in dieser Richtung ist durch die zweite, beziehungsweise dritte Auflage des trefflichen Lehrbuches von Wüllner angebahnt worden. Wenn ich in der Anwendung der Differential- und Integralrechnung noch um einen Schritt weiter gegangen bin, so habe ich damit

Verhältnisse anticipirt, die an unseren Hochschulen (ich spreche hier zunächst von den technischen) zwar augenblicklich noch nicht bestehen, aber doch schon in nächster Zeit werden Platz greifen müssen; die Einrichtung nämlich, dass dem physikalischen Unterrichte eine gewisse höhere mathematische Vorbildung vorausgeht. Wer sich die Mühe nehmen will darauf zu achten, was in diesem Buche mit einem verhältnissmässig sehr geringen Aufwande von höheren mathematischen Hilfsmitteln erreicht worden ist, wird die Ueberzeugung gewinnen, dass die soeben ausgesprochene Anforderung kein schwer zu lösendes Problem in sich schliesst. In der That enthalten die wenigen Blätter unserer „mathematischen Einleitung" sogar noch etwas mehr, als in dem Nachfolgenden wirklich zur Anwendung gekommen ist; die darin vorgetragenen Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung genügen in der Hand eines geübten und sachkundigen Lehrers vollkommen zu einem allen zeitgemässen Anforderungen einer technischen Hochschule entsprechenden physikalischen Unterrichte.

Es ist hier nicht der Ort, die Frage zu erörtern: durch welche Modification der bestehenden Studieneinrichtungen eine dem physikalischen Unterrichte am Polytechnikum vorausgehende Vorbildung in den unentbehrlichsten Lehrsätzen der höheren Mathematik am besten erreicht werden könnte. Ein sehr nahe liegender Weg zu diesem Ziele bietet sich vorderhand in der Weise dar, dass der Professor der Physik selbst sein Lehrfach mit einem Cyclus von mathematischen Vorträgen einleitet, in welchen er auf möglichst kurzem Wege und ohne die Grenzen des unentbehrlich Nothwendigen zu überschreiten, diejenigen Lehrsätze entwickelt, von welchen er späterhin im physikalischen Lehrvortrage Gebrauch zu machen beabsichtiget. Der dazu erforderliche Zeitaufwand wird allein schon durch das Entfallen der Zeitverluste, welche mit einer durchaus elementaren Behandlung verbunden sein würden, reichlich ersetzt, ganz abgesehen von den Vortheilen, welche aus der Erhebung des Unterrichtes auf einen wesentlich höheren Standpunkt erwachsen.

Mit Hilfe der in der mathematischen Einleitung vorgetragenen Lehrsätze ist es möglich gewesen, den drei ersten Capiteln, welche die in allen Lehrbüchern der Physik mehr oder weniger eingehend vertretenen mechanischen Disciplinen behan-

deln, in einem vierten und fünften Capitel auch die Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie und der Potentialtheorie anzuschliessen.

In dieser Zusammenstellung bilden die genannten Partien ein Ganzes, für welches mir der Titel: „allgemeine mechanische Physik“ passend schien.

Beim Unterrichte müssen die hier vereinigten Disciplinen allerdings in einer anderen Anordnung zum Vortrage kommen, indem die beiden letztgenannten im Zusammenhange mit den betreffenden Partien der Experimentalphysik (Wärme, Magnetismus und Elektricität) gelehrt werden müssen, um einerseits das Verständniss zu erleichtern und andererseits nicht durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge mathematischer Deductionen zu ermüden.

Anders verhält es sich beim Studium und bei der Aneignung des Vorgetragenen. Das sogenannte Beherrschen des Stoffes, welches in einem durch genaue Kenntniss des wissenschaftlichen Zusammenhanges übersichtlich gemachten Wissen der Einzelnheiten besteht, ist nicht das Ergebniss einer blossen Gedächtnissarbeit, sondern zunächst und wesentlich auch eine Aufgabe der Abstraction.

Diese Aufgabe scheint mir durch Compendien sehr erleichtert zu werden, welche eine zusammenhängende Darstellung der mechanischen Principien an die Hand geben, auf deren Kenntniss es bei einem gründlichen Studium der Physik vorzugsweise ankommt.

Ich habe bei der Zusammenstellung des vorliegenden Grundrisses zunächst jene Partien der Physik in's Auge gefasst, für welche das Bedürfniss nach einem solchen Buche nach meinen Wahrnehmungen am meisten vorhanden ist.

Dabei kommen in erster Linie die mechanische Wärmetheorie und die Potentialtheorie in Betracht, deren Aufnahme in unsere Lehrbücher der Experimentalphysik eigentlich erst durch Wüllner's Lehrbuch eingeleitet ist.

Wohl besitzen wir ein ausgezeichnetes Lehrbuch über diese Disciplinen von Briot, doch ist dasselbe für das erste Studium zu schwierig, zumal wegen seiner zwar sehr eleganten aber häufig allzu wortkargen und knappen Darstellung. Auch ist es für den besagten Zweck zu umfangreich. Andererseits werden die in der Einleitung des Briot'schen Buches voraus-

geschickten Lehrsätze der Mechanik ohne nähere Erläuterungen, nur mit kurzen Andeutungen über deren Ableitung, mitgetheilt und dabei schon gewisse Vorkenntnisse aus der höheren Mathematik vorausgesetzt.

Noch weniger ist die Sammlung der classischen Abhandlungen von Clausius oder das treffliche Buch von Zeuner darauf berechnet und geeignet, als Compendium für die von mir berücksichtigte Unterrichtsstufe zu dienen, erstere schon darum nicht, weil sie überhaupt kein Lehrbuch ist, überdies viel zu umfangreich und bedeutende Vorkenntnisse voraussetzend, — letzteres eben auch wegen seines zu grossen Umfanges und seiner fast ausschliesslich praktischen Richtung. Die gleichfalls vorzügliche Schrift von Clausius über die Potentialfunction und das Potential erstreckt sich nicht auf die Anwendungen der Potentialtheorie im Gebiete der Elektricität und des Magnetismus, um die es sich in unserem Falle vorzugsweise handelt.

Ich habe mir daher die Aufgabe vorgelegt, die mehrfach genannten Disciplinen in leichtfasslichen Grundzügen, jedoch streng wissenschaftlich und mit steter Hinweisung, sowohl auf die dabei in Betracht kommenden Theoreme der Mechanik als auch auf Thatsachen der Experimentalphysik darzustellen.

Die so entstandene Skizze hätte, mit einer entsprechenden mechanischen Einleitung versehen, füglich auch als ein selbstständiges Werkchen, ungefähr nach dem Plane des Buches von Briot durchgeführt, erscheinen können; ich habe es jedoch vorgezogen, dieselbe an einen Abriss der Mechanik anzuschliessen, welcher ausser den allgemeinen Lehrsätzen auch die Mechanik der Aggregationszustände in der bereits oben näher bezeichneten Ausdehnung behandelt. Auf diese Art ist der Umfang des Buches, mit Ausschluss eines speciellen Abschnittes über die Wellentheorie, auf das ganze Gebiet der mechanischen Physik ausgedehnt worden.

Zur Uebergehung der Wellentheorie hat mich die Erwägung bestimmt, dass eine ganz neue und zweckentsprechende, von den Abschnitten über Akustik nnd Optik getrennte Darstellung derselben bereits vorliegt, nämlich im dritten Abschnitte des ersten Bandes (3. Auflage) von Wüllner's Physik. Ich glaube dieser Einschränkung im Titel meines Buches mit der Bezeichnung „allgemeine me-

chanische Physik" Rechnung getragen zu haben, insofern nämlich die Wellentheorie schon die Betrachtung bestimmter Bewegungsformen zum Gegenstande hat.

Die im Anhange der Mechanik zusammengestellten, so wie überhaupt die im Inhaltsverzeichnisse mit einem Stern (*) bezeichneten Paragraphen, zu welchen namentlich gewisse auf einen weitergehenden Lehrvortrag berechnete Sätze der Potentialtheorie gehören, können bei der ersten Durchlese ohne Störung des Zusammenhanges übergangen werden.

Das Buch soll nämlich nicht nur Studirenden nützlich, sondern auch Lehramtscandidaten als vorbereitende Einleitung zum Studium grösserer Werke dienlich sein. Dieser letztere Zweck war es hauptsächlich, der mich veranlasst hatte, die vorhin erwähnten, über den Plan eines Compendiums für Studirende hinausgehenden Zusätze und Erweiterungen auch noch in den Rahmen des Buches einzufügen.

Ueber die Gesichtspunkte, welche ich bei der Bearbeitung der einzelnen Abschnitte im Auge behalten habe, sei noch Folgendes bemerkt.

In der mathematischen Einleitung war ich bemüht, die nothwendigen Sätze auf dem kürzesten Wege abzuleiten, um den Leser so rasch als möglich zum Verständnisse der folgenden Abschnitte zu befähigen. Strengere Beweismethoden und weitere Ausführungen (z. B. über die Stetigkeit der Functionen, Convergenz der Reihen u. s. w.) mussten unbedingt dem eingehenden mathematischen Lehrvortrage vorbehalten bleiben. Was insbesondere die Stetigkeitslehre betrifft, konnten die allgemeinsten, zum Verständnisse der Differentialrechnung nothwendigen Grundbegriffe davon wohl als bekannt angenommen werden, insofern ja an den Mittelschulen schon analytische Geometrie in der Ebene in gewisser Ausdehnung gelehrt wird. Eine weitergehende Darstellung dieses Gegenstandes aber würde, um allgemein und wissenschaftlich correct zu sein, die Kenntniss der Differentialrechnung schon voraussetzen.

Wo ich in den späteren Abschnitten fremde Werke benutzt habe, ist dies in der Regel an Ort und Stelle bemerkt worden. Im Allgemeinen habe ich in dieser Hinsicht nur noch hinzuzufügen, dass ich mich bei der Bearbeitung der mechanischen Wärmetheorie und der Potentialtheorie vornehmlich an

die früher genannten Werke von Briot und Clausius gehalten habe. Doch wird man einen durchaus selbstständigen Entwickelungsgang mit wesentlichen Abweichungen in der Verbindung und Ableitung der Theoreme, nebst Zusätzen zur Erläuterung ihrer Bedeutung und Anwendung, nicht verkennen. Ich glaube auf diese Art insbesondere die Potentialtheorie im Vergleiche mit dem Lehrbuche von Briot für das erste Studium übersichtlicher, fasslicher, und in Bezug auf physikalische Anwendung instructiver dargestellt zu haben.

Stellenweise bin ich, wenn es mir nöthig schien, auch unmittelbar auf die Arbeiten von Green und Gauss zurückgegangen, wie z. B. bei den Erörterungen über die Cascadenbatterie, über erdmagnetische Verhältnisse u. s. w.

Schliesslich muss ich noch meinem Zuhörer Herrn Eduard Glaser bestens danken für die grosse Mühe und Ausdauer, mit welcher er das Stenographiren und Transcribiren des von mir grösstentheils frei dictirten Manuscriptes, sowie die Anfertigung fast sämmtlicher Zeichnungen nach meinen vorgezeichneten Skizzen, aus eigenem Antriebe zu übernehmen die Güte hatte.

Das Manuscript ist später durch eigenhändige Abänderungen und Zusätze von mir mehrfach umgearbeitet und erweitert worden. Auf diese Art sind einige orthographische Ungleichförmigkeiten in den Satz gekommen, die ich bei der Correctur leider nicht sofort beachtet habe. Der Leser wolle dieselben freundlichst entschuldigen; der Brauchbarkeit des Buches werden sie wohl nicht abträglich sein.

W.

Inhaltsverzeichniss.

(Ueber die mit (*) bezeichneten Paragraphen siehe die Vorrede.)

Mathematische Einleitung.

Erstes Hauptstück.

Zweites Hauptstück.

Drittes Hauptstück.

Anhang zur Mechanik.

Viertes Hauptstück.

Fünftes Hauptstück.

Mathematische Einleitung.

(Enthaltend die beim Studium dieses Buches, insbesondere der mechanischen Wärmetheorie und Potentialtheorie erforderlichen Lehrsätze aus der höheren Mathematik.)

(**Funktionen.**) Wenn eine Grösse von einer oder mehreren anderen Grössen in der Art abhängig ist, dass sie sich mit denselben nach bestimmten Gesetzmässigkeiten ändert, so nennt man sie eine Funktion dieser letzteren und die Gleichung, welche die besagte Abhängigkeit ausdrückt, bestimmt die Form der Funktion. So sind z. B. die Grössen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ und } \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

verschiedene Funktionen von den Veränderlichen x, y und z, was man symbolisch ausdrücken kann, indem man z. B. schreibt $r = f(x, y, z)$; $\frac{1}{r} = F(x, y, z)$; wobei F und f sogenannte Funktionszeichen sind. In der Regel enthält der Ausdruck einer Funktion auch constante Grössen, wie z. B. wenn $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ gegeben ist, wobei a, b und c unveränderliche Grössen bedeuten, oder symbolisch ausgedrückt $r = \varphi(x, y, z, a, b, c)$; wobei φ wieder ein Funktionszeichen ist. Je nachdem die Gleichung, welche die Form der Funktion feststellt, eine algebraische oder eine transcendente ist, führt auch die Funktion diese Namen. So sind z. B. die bisher angeführten Funktionen algebraische, dagegen ist $y = \sin x$ eine transcendente Funktion von x. Von anderen Unterscheidungen der Funktionen wird später gelegentlich die Rede sein.

(**Differentiation.**) Wenn in einer Funktion z. B. $y = x^2$ eine Veränderliche, also in unserem Beispiele x, sich ändert und etwa in $x + \Delta x$ übergeht (das Symbol Δx heisst so viel wie Aenderung von x), so ändert sich im Allgemeinen auch

der Werth der Funktion, indem er z. B. hier in $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ übergeht*), wobei Δy die Aenderung der Funktion bedeutet, welche in unserem Falle offenbar $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ ist. Untersucht man das Verhältniss $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen den Aenderungen des Funktionswerthes und der Veränderlichen, so erhält man den sogenannten Differenz-Quotienten, im obigen Beispiele vom Betrage $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Es ist von grosser Wichtigkeit bei allen Funktionen den Grenzwerth angeben zu können, welchen dieser Differenz-Quotient für den Fall annimmt, dass die Aenderung Δx der Veränderlichen und entsprechend auch die Aenderung Δy des Funktionswerthes verschwindend klein werden. Man bezeichnet diesen Grenzwerth durch $lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$**) oder einfacher durch $\frac{dy}{dx}$, wobei man sich unter den Symbolen dx und dy die besagten verschwindend kleinen Aenderungen, man nennt sie Differentialien, vorstellt. Der Quotient $\frac{dy}{dx} = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$ heisst dann Differentialquotient. Er hat in unserem Beispiele offenbar den Werth $\frac{dy}{dx} = 2x$, insofern eben Δx verschwindend klein wird. Die Ermittelung der Differentialien und Differentialquotienten der Funktionen bildet den Gegenstand der sogenannten Differentialrechnung. Die Rechnungsoperation, welche das Differentiale einer gegebenen Funktion liefert, heisst Differentiiren oder Differenziren.

Es ist hier nicht von einem „Vernachlässigen" sehr kleiner Grössen wie Δx die Rede, sondern von einem vollständigen Nullwerden derselben, wobei auch dann Δy Null wird, was jedoch nicht ausschliesst, dass das Verhältniss $\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ einen bestimmten von 1 verschiedenen Werth (im obigen Beispiele $lim (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x$) habe, da zwei abnehmende Grössen, indem sie schliesslich verschwinden, deshalb noch nicht identisch werden. Man kann nämlich das Verhältniss, in welchem die abnehmenden Grössen Δy und Δx zu

*) Wir werden künftighin, da ein Missverständniss nicht wohl stattfinden kann, einfach Δx^2 für $(\Delta x)^2$ setzen und entsprechend in ähnlichen Fällen.

**) Von *limes* die Grenze.

einander unmittelbar vor ihrem absoluten Nullwerden stehen, auch dem nach erfolgtem Nullwerden auftretenden Verhältnisse $\frac{0}{0}$ beilegen und mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnen. Ein Grenzwerth wie ein Differentialquotient ist daher nicht als ein blosser Näherungswerth im gewöhnlichen Sinne, sondern als ein absolut genauer anzusehen, der im Allgemeinen selbst wieder eine Funktion von x (in unserem Beispiele $2x$) ist. Mit Rücksicht auf diesen letzteren Umstand nennt man den Differentialquotienten auch die abgeleitete Funktion, die Ableitung oder die Derivirte der gegebenen Funktion und bezeichnet ihn mit y' oder $f'(x)$ je nachdem man die gegebene Funktion mit y oder mit $f(x)$ bezeichnet hat. Dabei ist offenbar

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x),$$

woraus folgt, dass man auch schreiben kann

$$dy = \frac{df(x)}{dx} dx = f'(x) dx.$$

Dieser Ausdruck des Differentials einer Funktion (in unserem Beispiele $dy = 2x dx$) hat, da dx und dy Null werdende Grössen sind, nur insofern einen bestimmten Sinn, als er in anderer, häufig bequemerer Form das Grenzverhältniss $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ wiedergibt, während dy und dx einzeln genommen keine bestimmten von Null verschiedenen Zahlenwerthe haben.

Anders verhält es sich bei vielen praktischen Anwendungen der Differentialrechnung in der Physik, Mechanik, Geodäsie u. s w., bei welchen man dx und dy nicht als Null werdende, sondern nur als verhältnissmässig äusserst kleine zusammengehörige Aenderungen betrachtet, deren Verhältniss dann annähernd durch den Differentialquotienten $f'(x)$ der betreffenden Funktion festgestellt wird. In solchen Fällen wird dann die Differentialrechnung allerdings eine Näherungsrechnung, deren Genauigkeit jedoch durch Verkleinerung von dx und somit auch dy beliebig weit getrieben werden kann. Betrachtet man z. B. obiges $dy = d(x^2)$ als die Flächenausdehnung eines Quadrates, dessen Seite x etwa durch Erwärmung um einen Grad um αx ausgedehnt wird, wobei α den Ausdehnungscoëfficienten (für Eisen beiläufig $\alpha = 0{,}000012$) bedeutet, so setzt diess voraus, dass man $\alpha x = dx$ setzt, wodurch man dann erhält $d(x^2) = 2x dx = 2\alpha x^2$ und sonach findet, dass der Coëfficient 2α für

die Flächenausdehnung annähernd das Doppelte ($2\alpha = 0{,}000024$) des Längenausdehnungscoëfficienten ist. Hier drückt der Differentialquotient $2x$ das Verhältniss der beiden miteinander verglichenen Ausdehnungen nur annähernd aus, weil die betrachteten Aenderungen nicht Null werdende, sondern messbare, wenn auch verhältnissmässig äusserst kleine Grössen sind. Bei solchen Betrachtungen ist die Schreibweise $dy = f'(x)dx$ oft übersichtlicher als $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, wesshalb wir sie auch bei den folgenden Entwickelungen der Grundformeln anwenden werden.

Einige allgemeine Regeln, welche sich dabei ergeben, wollen wir schon jetzt hervorheben.

I. Wenn die zu differenzirende Funktion ($y = ax + b$) aus einem constanten (b) und veränderlichen (ax) Theile besteht, so wird ersterer durch eine Aenderung der Veränderlichen nicht beeinflusst; er fällt also fort, wenn man vom geänderten Funktionswerthe ($y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$) den ursprünglichen ($y = ax + b$) abzieht. In der Differenz ($\Delta y = a\Delta x$) erscheint daher der constante Zusatz (b) nicht mehr, also auch im Differentiale ($dy = adx$) nicht, was man in der Form aussprechen kann, dass das Differentiale einer Constanten = Null ist, insofern man nämlich das Differentiale der Funktion (dy) aus den Differentialien ihrer Glieder ($d(ax)$ und db) sich bestehend denkt und dem Gesagten zufolge das Differentiale des constanten Gliedes (db) gleich Null erscheint. Anderseits erhellet aus der Unabhängigkeit einer Constanten von den Aenderungen der Veränderlichen, dass ein constanter Faktor (z. B. a) einer Veränderlichen (x) beim Differenziren stets vor das Differentialzeichen gesetzt werden kann, ($d(ax) = adx$). Es liegt endlich in der Natur der Sache und ist nebenbei schon im Vorhergehenden ersichtlich geworden, dass das Differentiale einer Summe von Funktionen gleich sein muss der Summe der Differentialien der einzelnen Funktionen. So wie z. B. für $z = ax + by$ analog dem früheren Beispiele $dz = adx + bdy$ also $dz = d(ax) + d(by)$, so hat man allgemein, wenn $u = F(x) + f(x) + \varphi(x) + \ldots$ zu setzen $du = dF(x) + df(x) + d\varphi(x) + \ldots$

II. Ist das Produkt $y = uv$ zweier Funktionen einer Veränderlichen x gegeben, so erhält man im Falle einer Aenderung von x um Δx zuvörderst

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta v\Delta u$$

also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x}$, worauf beim Uebergange auf die Grenzen und Nullwerden von Δv hervorgeht:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \text{ oder } dy = d(uv) = udv + vdu.$$

III. Für den Quotienten $y = \frac{u}{v}$ zweier Funktionen von x erhält man zunächst $yv = u$, also nach II. $ydv + vdy = du$,

$$dy = \frac{du - ydv}{v} = \frac{du - \frac{u}{v}dv}{v}$$

folglich

$$dy = d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Die beiden in II. und III. abgeleiteten Gleichungen lassen sich leicht in Worten formuliren und als Lehrsätze für das Differenziren eines Produktes oder eines Quotienten aussprechen.

Wir lassen nun noch einige Hilfssätze folgen, welche zur Entwickelung der einzelnen für das Differenziren der Funktionen geltenden Regeln nöthig sind.

(**Binomischer Lehrsatz. — Basis der natürlichen Logarithmen.**) Entwickelt man der Reihe nach die Potenzen des Binoms $a + b$ durch succesive Multiplikation, so erhält man

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Man kann diese Ausdrücke auch so schreiben

$$(a + b)^2 = a^2 + \frac{2}{1}ab + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}ab^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}ab^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 . 2 . 3 . 4}b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5 . 4}{1 . 2}a^3b^2 + \frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3}a^2b^3 +$$
$$\frac{5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4}ab^4 + \frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}b^5,$$

woraus das allgemeine Bildungsgesetz sofort ersichtlich ist, welches so ausgedrückt werden kann

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \cdot$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \cdots \quad . \quad . \quad 1)$$

was man auch symbolisch in folgender Weise zu schreiben pflegt

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots \quad . \quad 2)$$

wobei allgemein das Symbol $\binom{n}{r}$ mit den Worten „n über r" ausgesprochen wird und überdies noch bemerkenswerth ist, dass $\binom{n}{2}$ die Zahl der Amben, $\binom{n}{3}$ die Zahl der Ternen u. s. w. von n Elementen ohne Wiederholungen vorstellt. Die allgemein durch das Symbol $\binom{n}{r}$ vorgestellten Coëfficienten nennt man Binomialcoëfficienten.

Es soll nun beispielsweise $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ entwickelt werden.

Man erhält nach vorstehender Formel

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \cdots$$

oder

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1.2.3.4} + \cdots$$

Nimmt man nun m als unendlich gross an, wodurch $\frac{1}{m}$ verschwindet, so geht der Ausdruck über in

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

welche Summe $= 2{,}71828\ldots\ldots$ ist und mit e bezeichnet zu werden pflegt. Es ist demnach für ein ins Unendliche wachsendes m

$$\lim. \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 2{,}71828 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Nimmt man e zur Basis eines Logarithmensystems, so erzielt man dadurch, wie sich sofort zeigen wird, gewisse Vereinfachungen in den Formeln, wesshalb man die auf e als Basis bezogenen Logarithmen natürliche nennt, im Gegensatze zu den gemeinen auf 10 als Basis bezogenen. Man bezeichnet

jene mit l, diese mit log; also z. B. $y = \mathrm{l}x$ bedeutet $e^y = x$; $z = \log x$ bedeutet $10^z = x$. Es folgt hieraus zugleich $e^y = 10^z$ und wenn man von beiden Seiten dieser Gleichung die natürlichen Logarithmen nimmt und beachtet, dass $\mathrm{l}e = 1$ ist,

$$\left.\begin{array}{l} y = z\,.\,\mathrm{l}10 = 2{,}30258\,z = Mz \\ \mathrm{l}x = 2{,}30258 \log x = M \log x \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Hätte man beiderseits die gemeinen Logarithmen genommen, so wäre wegen $\log 10 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} y \log e = z = 0{,}43429\,y = my \\ \log x = 0{,}43429\,\mathrm{l}x = m\,\mathrm{l}x \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Wir wollen die Zahl M den Modulus des natürlichen und m den des gemeinen Logarithmensystems nennen. Beide Zahlen stehen zu einander in einer sehr einfachen Relation. Es erhellet nämlich aus 4) und 5) $\mathrm{l}x = M \log x = \frac{\log x}{m}$, woraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{1}{m} \\ m = \frac{1}{M} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

(Differentiation eines Logarithmus.) Es sei $y = \mathrm{l}x$, somit

$$\Delta y = \mathrm{l}(x + \Delta x) - \mathrm{l}x = \mathrm{l}\,\frac{x + \Delta x}{x} = \mathrm{l}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \text{ also}$$

$$\frac{x}{\Delta x} \cdot \Delta y = \frac{x}{\Delta x} \cdot \mathrm{l}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \mathrm{l}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

oder wenn man die mit der unendlichen Abnahme von Δx unendlicch wachsende Grösse $\frac{x}{\Delta x}$ mit m bezeichnet

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{1}{x}\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{\mathrm{l}e}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{nach Formel 3)}$$

demnach

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{d\,\mathrm{l}x}{dx} = \frac{1}{x} \\ dy = d\,\mathrm{l}x = \frac{dx}{x} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Wäre dagegen $y = \log x$ gewesen, so hätte man $dy = d \log x = d m \mathrm{l}x = m d \mathrm{l}x = m \frac{dx}{x}$ erhalten.

(Differentiation einer Exponentialgrösse.) Ist $y = a^x$, somit $\mathrm{l}y = x\,\mathrm{l}a$ so gibt die Differentiation nach 7) $d\,\mathrm{l}y = \frac{dy}{y} = \mathrm{l}a\,.\,dx$, folglich $dy = \mathrm{l}a\,.\,y\,.\,dx$ und wegen $y = a^x$

$$dy = da^x = \mathrm{l}a\,.\,a^x dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

(Differentiation einer Potenz.) Wenn $y = x^n$ also $ly = n lx$ und $dly = \frac{dy}{y} = ndlx = n\frac{dx}{x}$, so folgt hieraus sofort

$dy = ny\frac{dx}{x}$ und mit Rücksicht auf $y = x^n$

$$dy = dx^n = nx^{n-1}dx. \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Dasselbe Resultat hätte man auch erhalten aus

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots$$

also

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \lim\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots\right],$$

welcher Ausdruck, wenn Δx verschwindet, in $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ übergeht, woraus ebenfalls $dy = dx^n = nx^{n-1}dx$ folgt.

(Differentiation der trigonometrischen Funktionen.) Es sei zunächst

$y = \sin x,\ y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x,$

also $\quad \Delta y = \sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x =$

$\sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x$ und hieraus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x}{\Delta x}(\cos\Delta x - 1) + \cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

Geht man auf die Grenzen über, indem man Δx verschwinden lässt und beachtet, dass in diesem Falle $(\cos\Delta x - 1) = 0$ und $\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$ wird, so erhält man

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \cos x \text{ also}$$

$$dy = d\sin x = \cos x\, dx \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

Für $y = \cos x,\ y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) = \cos x \cos\Delta x - \sin x \sin\Delta x$ erhält man $\Delta y = \cos x(\cos\Delta x - 1) - \sin x \sin\Delta x$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos x}{\Delta x}(\cos\Delta x - 1) - \sin x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$, woraus in gleicher Weise wie oben $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = -\sin x$ hervorgeht, also

$$dy = d\cos x = -\sin x\, dx. \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

Wäre $y = \operatorname{tg} x$ gegeben, so hätte man mit Rücksicht auf $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nach Satz III vorzugehen. Man erhält auf diese Art

$$d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{\cos x\, d\sin x - \sin x\, d\cos x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx \text{ folglich}$$

$$dy = d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \ldots \ldots \quad 12)$$

Ebenso leicht findet man

$$dy = d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad \ldots \ldots \quad 13)$$

(**Differentiation der cyclometrischen Funktionen.**) Es sei gegeben $y = \text{arc.}\sin x$, also $x = \sin y$, folglich nach 10) $dx = d\sin y = \cos y\, dy$, also $dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$; da nun $x = \sin y$; so erhält man schliesslich

$$dy = d\,\text{arc.}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots \ldots \quad 14)$$

Weil ferner nach Fig. 1 $\text{arc.}\cos x + \text{arc.}\sin x = \frac{\pi}{2}$, also $d\,\text{arc.}\sin x + d\,\text{arc.}\cos x = 0$, so ergibt sich für $y = \text{arc.}\cos x$

$$dy = d\,\text{arc.}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad . \; . \quad 15)$$

Fig. 1.

Für $y = \text{arc.}\,\mathrm{tg}\,x$ findet man mit Rücksicht auf $x = \mathrm{tg}\,y$, also nach 12) $dx = d\,\mathrm{tg}\,y = \frac{dy}{\cos^2 y}$, dass $dy = \cos^2 y\, dx = \frac{dx}{\sec^2 y} = \frac{dx}{1+\mathrm{tg}^2 y}$; also

$$dy = d\,\text{arc.}\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots \ldots \quad 16)$$

Ebenso findet man

$$dy = d\,\text{arc.}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

(**Funktionen von Funktionen.**) Wir nehmen an, es sei z. B. $z = F(y)$ und $y = f(x)$ und man habe den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ zu bestimmen. Man erwäge, dass $dz = F'(y)\,dy$ und $dy = f'(x)\,dx$, folglich $dz = F'(y)f'(x)\,dx$ oder

somit

$$\left.\begin{aligned} dz &= \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 18)$$

Man kann diess auch so schreiben

$$\frac{dz}{dx} = F'(f(x))\,f'(x) \quad \ldots \ldots \quad 19)$$

eine Regel, die sich leicht auf complicirtere Funktionen von Funktionen ausdehnen lässt. Wäre etwa $u = F(z)$, $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$; so hätte man

$$\frac{du}{dx} = F'(z) f'(y) \varphi'(x) = F'\big(f(\varphi(x))\big) f'(\varphi(x)) \varphi'(x) \quad . \quad . \quad 20)$$

Es sei z. B. $u = \mathrm{l} \sin(x^n)$; man erhält sofort

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin(x^n)} \cos(x^n) n x^{n-1} = n x^{n-1} \cot(x^n).$$

(**Höhere Differentialien.**) Da der Differentialquotient $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ im Allgemeinen*) selbst wieder eine Funktion von x ist, so kann man sich die Aufgabe stellen, von eben dieser Funktion $f'(x)$ den Differentialquotienten zu bilden. Derselbe wird mit $f''(x)$ bezeichnet (oder mit y'', wenn $y = f(x)$ und $y' = f'(x)$ war) und heisst in Bezug auf die ursprüngliche Funktion $f(x)$ deren zweite Ableitung, zweite Derivirte oder zweiter Differentialquotient.

Nach der eingeführten Bezeichnungsart kann derselbe so ausgedrückt werden $f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}$.

Entwickelt man nach Satz III, so erhält man $\left[\frac{d(df(x))dx - d(dx)df(x)}{dx^2}\right] : dx$. Da man nun das Differentiale dx der Veränderlichen beim fortgesetzten Differenziren als constant betrachten muss, wenn die Untersuchung einen bestimmten Sinn haben soll, so wird $d(dx) = 0$ zu setzen sein, wodurch man erhält $f''(x) = \frac{d(df(x))}{dx^2}$ oder $= \frac{ddf(x)}{dx^2}$, wofür man einfacher zu schreiben pflegt

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Das zweite Differentiale der Funktion ist demnach

$$d^2 f(x) = f''(x) dx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Aus dem Gesagten ergibt sich von selbst die weitere Verallgemeinerung der Regeln der fortgesetzten Differentiation sowie die Bedeutung der Ausdrücke

$$\overset{(n)}{f}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d\overset{(n-1)}{f}(x)}{dx} \text{ u. s. w.}$$

---

*) Nach Umständen kann er nämlich auch eine Constante sein; ist z. B. $f(x) = ax$, so ist $f'(x) = a$.

oder auch $$d^n f(x) = \overset{(n)}{f}(x)\,dx^n.$$

Es sei z. B. $y = x^3$; es ist dann $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2$; $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 6$; $\frac{d^4y}{dx^4} = f''''(x) = 0$. Für das früher angeführte Beispiel $y = x^2$ hatten wir $\frac{dy}{dx} = 2x$ und es ergäbe sich demnach $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. — Für $y = lx$ erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$ u. s. w. Für $y = e^x$, $\frac{dy}{dx} = e^x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ u. s. f.

Zur näheren Erläuterung der höheren Differentialien denken wir uns eine Curve uv (Fig. 2) und untersuchen die den Abscissen $OP = x$; $OP' = x + dx$; $OP'' = x + 2dx$ u. s. w. entsprechenden Ordinaten $MP = y$; $M'P' = P'N + NM' = MP$

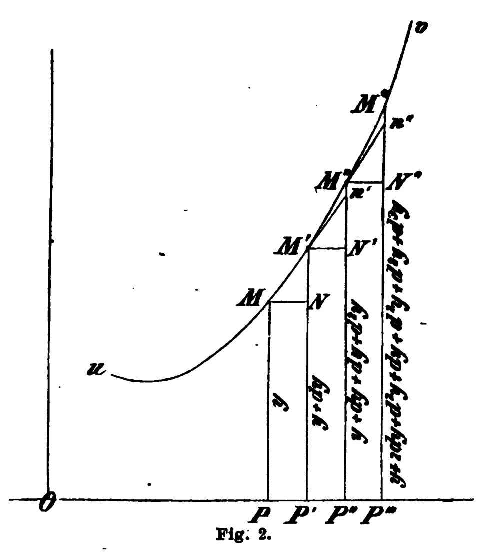


Fig. 2.

$+ NM' = y + dy$ u. s. w. Die dritte Ordinate ist dann um das Stück $N'M''$ grösser. Dieses Stück besteht aus $N'n' = NM' = dy$ und der Aenderung dieser Aenderung vom Betrage $n'M'' = d^2y$. Die dritte Ordinate $y = f(x + 2dx)$ ist also $= y + dy + dy + d^2y = y + 2dy + d^2y$. Bei der vierten kommt noch hiezu $N''M'''$; dieses besteht aus $N''n'' = dy + d^2y$ und $n''M'''$,

welches die eingetretene Aenderung dieser zusammengesetzten Aenderung vorstellt, nämlich $d(dy + d^2y) = d^2y + d^3y$. Es kommt also hier noch eine Aenderung dritter Ordnung d^3y in Betracht und man erhält $y_3 = f(x + 3dx) = y + 2dy + d^2y + dy + d^2y + d^2y + d^3y = y + 3dy + 3d^2y + d^3y$. Durch fortgesetzte Betrachtungen dieser Art kommt man, wie man schon jetzt aus dem Auftreten der Binomialcoëfficienten erkennt, zu dem allgemeinen Resultate

$$y_n = f(x+ndx) = y + \binom{n}{1}dy + \binom{n}{2}d^2y + \binom{n}{3}d^3y + \cdots \binom{n}{n}d^ny \qquad 23)$$

(**Reihen von Taylor und Maclaurin.**) Die vorstehende Formel kann auch so geschrieben werden

$$f(x+n\,dx) = y + \frac{n}{1}dy + \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2}d^2y + \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}d^3y \ldots$$

und wenn man das zweite Glied mit dx, das dritte mit dx^2, das vierte mit dx^3 u. s. w. sowohl multiplicirt als dividirt

$$f(x + n\,dx) = y + \frac{n\,dx}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)dx^2}{1\,.\,2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)dx^3}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots.$$

Setzt man nun $n\,dx = h$ und lässt n unendlich gross werden, wodurch $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$ u. s. w. verschwinden, so erhält man

$$f(x + h) = y + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\,.\,2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots \text{ oder}$$

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1\,.\,2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdot \qquad 24)$$

welche Reihe, insofern sie convergirt, das heisst, insofern sie eine endliche Summe gibt, geeignet ist den Werth $f(x + h)$ einer Funktion zu berechnen, welcher eintritt, wenn die Veränderliche x einen endlichen Zuwachs vom Betrage h erhält.

Mit Hilfe dieser Formel findet man z. B.

$$l(x + 1) = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{1.2}{x^3}\cdot\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{1\,.\,2\,.\,3}{x^4}\cdot\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{x^5}\cdot\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cdots.$$

$$\mathrm{l}(x-1)=\mathrm{l}x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1.2}-\frac{1.2}{x^3}\cdot\frac{1}{1.2.3}-\frac{1.2.3}{x^4}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}$$
$$-\frac{1.2.3.4}{x^5}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5}$$

oder einfacher

$$\mathrm{l}(x+1)=\mathrm{l}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{5x^5}\cdots\cdots$$

$$\mathrm{l}(x-1)=\mathrm{l}x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{5x^5}\cdots\cdots$$

Die so gewonnenen Reihen für $\mathrm{l}(x+1)$ und $\mathrm{l}(x-1)$ können zur Ableitung eines wichtigen Satzes benutzt werden. Zunächst folgt daraus

$$\mathrm{l}(x+1)-\mathrm{l}(x-1)=\mathrm{l}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots\right].$$

Setzt man $\frac{x+1}{x-1}=z$, folglich $x=\frac{z+1}{z-1}$, so erhält man

$$\mathrm{l}z=2\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\cdots\right]$$ oder, indem man auf die gemeinen Logarithmen übergeht

$$\log z=2m\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\cdots\right]. \quad 25)$$

Setzt man in der Taylor'schen Reihe $x=0$ und $h=z$, so erhält man

$$f(z)=f(0)+f'(0)\frac{z}{1}+f''(0)\frac{z^2}{1.2}+f'''(0)\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots;$$

oder, indem man jetzt statt z wieder x schreibt

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{1.2}+f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots \quad 26)$$

Diese Reihe heisst die Maclaurin'sche. In derselben hat z. B. $f'(0)$ die Bedeutung, dass man den ersten Differentialquotienten der Function $f(x)$ bilden und in demselben sodann $x=0$ setzen soll. Die Reihe dient dazu, eine Funktion in eine nach den steigenden Potenzen der Veränderlichen geordnete Reihe zu entwickeln. Also z. B. $\sin x$ in eine nach den Potenzen des Bogens x geordnete Reihe. Man erhält in diesem Falle

$f(0)=\sin 0=0$; $f^{I}(0)=\cos 0=1$; $f^{II}(0)=-\sin 0=0$; $f^{III}(0)=-\cos 0=-1$; $f^{IV}(0)=\sin 0=0$; $f^{V}(0)=\cos 0=1$ u. s. w. also

$$\sin x = 0 + 1 \cdot \frac{x}{1} - 0 \cdot \frac{x^2}{1.2} - 1 \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + 0 \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} + 1 \cdot \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{u. s. w.}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \quad 27)$$

Ebenso würde man finden

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \quad 28)$$

(**Das „Unendlichkleine" höherer Ordnung.**) Schreibt man die Taylor'sche Reihe in der Form

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \frac{\Delta x}{1} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{1.2} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \dots$$

so folgt daraus

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + f''(x) \frac{\Delta x}{1.2} + f'''(x) \frac{\Delta x^2}{1.2.3} + \dots\dots$$

und wenn man auf die Grenzen übergeht

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) + f''(x) \frac{dx}{1.2} + f'''(x) \frac{dx^2}{1.2.3} + \dots\dots$$

wobei die Glieder $f''(x) \frac{dx}{1.2} + f'''(x) \frac{dx^2}{1.2.3} + \dots$ zugleich mit dx verschwinden, so dass man, wie bereits bekannt, auf den Ausdruck

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad \text{oder} \quad df(x) = f'(x)\, dx$$

zurückgeführt wird.

Unterlässt man dagegen in der vorletzten Gleichung die Division durch dx, so erhält sie die Gestalt

$$f(x + dx) - f(x) = df(x) = f'(x)\, dx + f''(x) \frac{dx^2}{1.2} + f'''(x) \frac{dx^3}{1.2.3} + \dots$$

welche nur unter der Voraussetzung zu dem gleichen Resultate $df(x) = f'(x)dx$ führt, wenn $f'(x)dx$ als Grenzwerth der Summe rechts vom Gleichheitszeichen betrachtet wird. Man muss also, um zu diesem Resultate zu gelangen, die Glieder mit der zweiten und den höheren Potenzen von dx als Grössen ansehen, welche im Vergleiche mit $f'(x)dx = df(x)$, obgleich dieses selbst verschwindend klein ist, verschwinden, wesshalb man sie „unendlich kleine Grössen von höherer Ordnung", nämlich von der zweiten, dritten u. s. w. Ordnung nennt. Damit ist nichts Anderes ausgesprochen, als dass man

zu den bisher vorgetragenen Differentialformeln auch auf dem Wege, das heisst mit Hilfe der Vorstellung gelangt, dass die zwischen x und dx bestehende Beziehung auch zwischen dx und dx^2, ferner zwischen dx^2 und dx^3 u. s. w. stattfindet. Es wird auf diese Art unter den Null werdenden Grössen dx, dx^2, dx^3 u. s. w. eine Rangordnung festgesetzt, welche nicht schwerer zu begreifen ist, als z. B. die Rangordnung der Grössen ∞, ∞^2, ∞^3 u. s. w. oder andere Erweiterungen des Zahlenbegriffes, zu welchen die Entwickelung der Mathematik und ihrer Abstraktionen nach und nach geführt hat. Im Sinne dieser Auffassung ist es gestattet dx nicht als eine absolut Null werdende, sondern als eine relativ, nämlich im Vergleiche mit x (oder überhaupt im Vergleiche mit einer endlichen Zahl) verschwindende Grösse anzusehen, im Vergleiche mit welcher wieder dx^2 verschwindet u. s. w. Dieselben Beziehungen gelten, wenn man sich die genannten Grössen mit endlichen Coëfficienten behaftet denkt, d. h. es verschwindet bdx im Vergleiche mit ax; cdx^2 im Vergleiche mit bdx u. s. w., wenn a, b, c endliche Werthe haben, wesshalb wir denn auch in der letzten Gleichung $f''(x)\frac{dx^2}{1.2} + \cdots$ als im Vergleiche mit $f'(x)dx$ verschwindend angesehen haben.

Erläutern wir das Gesagte noch durch ein geometrisch versinnlichtes Beispiel. Wir können das schon früher einmal betrachtete $y = x^2$ wählen, wobei uns nunmehr y die Fläche $ABCD$ (Fig. 3) eines Quadrates von der Seite x vorstellen mag. Wir lassen $x = AB$ in $x + \Delta x = AB + Bb$ und ebenso $x = DB$ in $x + \Delta x = DB + Bc$ übergehen, wodurch $y = ABCD$ in $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 = ABCD + ABac + DBdb + Bbec = ABCD + 2ABac + Bbec$ übergeht. Die Aenderung $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ ist dann durch die zwei Rechtecke $ABac = DBbd = x\Delta x$ und das kleine Quadrat $Bbec = \Delta x^2$ vorgestellt. Lassen wir Δx in's Unendliche abnehmen und somit Δy in $dy = 2xdx + dx^2$ übergehen und betrachten in dieser Gleichung dx^2 (das kleine Quadrat) im Vergleiche mit $2xdx$ (den beiden Rechtecken) als ver-

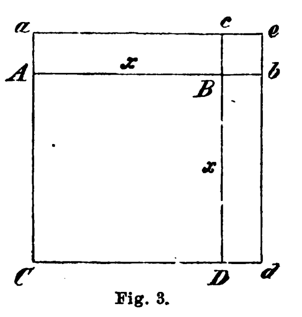


Fig. 3.

schwindend, so stimmt das Resultat $dy = 2x\,dx$ vollkommen mit jenem überein, welches wir früher aus der Betrachtung des Grenzverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ abgeleitet haben. Die Annahme von relativ verschwindenden Grössen aufsteigender Rangordnung führt also, wie auch aus diesem Beispiele hervorgeht, zu denselben Resultaten wie die Methode der Grenzen und weil sie in vielen Fällen kürzere und leichter fassliche Ableitungen gestattet, wird sie bei der Entwicklung von Lehrsätzen oft anstatt der Grenzmethode angewendet, was wir gelegentlich auch ohne Bedenken thun wollen.

(**Funktionen von mehreren Veränderlichen.**) Es sei $u = f(x, y) = xy$ gegeben, was uns allenfalls eine Rechtecksfläche $ABCD$ (Fig. 4) vorstellen mag. Durch die willkürliche Aenderung $\Delta x = Bb$ und $\Delta y = Bc$ der Seiten geht es in $y + \Delta y = Caed = (x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$ über.

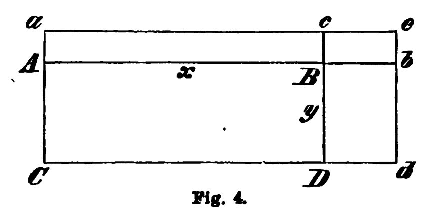


Fig. 4.

Lassen wir Δx und Δy in's Unendliche abnehmen, so wird $y + dy = xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy$ also $dy = y\,dx + x\,dy + dx\,dy$; diese Aenderung besteht aus den unendlich kleinen Rechtecken erster Ordnung $y\,dx = BbDd$ und $x\,dy = ABac$ und dem unendlich kleinen Rechtecke zweiter Ordnung $dx\,dy = Bbec$, welches gegen erstere verschwindet, wesshalb wir erhalten

$$du = d(xy) = y\,dx + x\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 29)$$

ein Resultat, welches übrigens auch schon aus dem Lehrsatze II. hervorgeht. Würden wir im Produkte xy zunächst nur x als veränderlich, dagegen y als constant betrachten, so würde das auf x allein bezogene Differentiale, welches wir durch das Symbol $\underset{x}{d}$ bezeichnen wollen, offenbar

$$\underset{x}{d}(xy) = y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 30)$$

sein. Ebenso erhielten wir, y allein als unveränderlich betrachtend, das Differentiale

$$\underset{y}{d}(xy) = y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 31)$$

Solche bloss auf eine einzelne von mehreren vorhandenen Veränderlichen bezogene Differentialien nennt man partielle.

Aus den Gleichungen 30 und 31 in Verbindung mit 29 geht nun hervor, dass das in Gleichung 29 dargestellte Differentiale, welches man, da es sich auf die gleichzeitige Aenderung aller vorhandenen Veränderlichen bezieht, das totale nennt, gleich ist der Summe der partiellen Differentialien, nämlich

$$du = d(xy) = \underset{x}{d}(xy) + \underset{y}{d}(xy) = y\,dx + x\,dy \quad . \quad . \quad 32)$$

Aus den Gleichungen 30 und 31 folgt $\frac{\underset{x}{d}(xy)}{dx} = y$. Man nennt den Quotienten des partiellen Differentiales durch das Differentiale der Veränderlichen, den partiellen Differentialquotienten der Funktion in Bezug auf diese Veränderliche und bezeichnet ihn häufig

statt mit $\frac{\underset{x}{d}f(x,y)}{dx}$ durch $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ oder

statt mit $\frac{\underset{y}{d}f(x,y)}{dy}$ durch $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Demnach kann man in unserem Beispiele

$y = \frac{\underset{x}{d}(xy)}{dx} = \frac{\underset{x}{d}u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $x = \frac{\underset{y}{d}(xy)}{dy} = \frac{\underset{y}{d}u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$ setzen und die Gleichung 32 in folgender Gestalt schreiben

$$du = y\,dx + x\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Diese, unmittelbar nur für unser Beispiel nachgewiesene Gleichung gilt allgemein für jede Funktion $u = f(x, y, z, \cdots\cdots)$ von mehreren veränderlichen Grössen. Wir erhalten nämlich allgemein

$$du = df(x, y, z, \cdots\cdot) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + . \quad . \quad 33)$$

was man auch oft in der abgekürzten Form

$$df(x, y, z, \cdots) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34)$$

schreibt, indem man statt $f(x, y, z, \cdots\cdot)$ nur das Funktionszeichen f einsetzt.

(**Beispiele von partiellen Differentiationen.**) Man betrachte die Funktion

$$r = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{1}{2}} = U^{\frac{1}{2}}$$

wobei x', y' und z' als constant gelten sollen, dagegen x, y, z als veränderlich. Man erhält zunächst

$$\underset{x}{d} r = \tfrac{1}{2} U^{\frac{1}{2} - 1} \underset{x}{d} U = \tfrac{1}{2} U^{-\frac{1}{2}} \underset{x}{d} U \text{ und wegen}$$

$\underset{x}{d} U = 2(x' - x)(-dx)$ auch $\underset{x}{d} r = - U^{-\frac{1}{2}}(x' - x)\, dx = -\dfrac{(x' - x)}{U^{\frac{1}{2}}} dx$ oder $\underset{x}{d} r = -\dfrac{(x' - x)}{r} dx$; somit ist der partielle Differentialquotient $\dfrac{\underset{x}{d} r}{dx}$ oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= -\frac{x' - x}{r} \\ \text{und ebenso} \quad \frac{\partial r}{\partial y} &= -\frac{y' - y}{r} \\ \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial z} &= -\frac{z' - z}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 35)$$

Wäre dagegen

$$\frac{1}{r} = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}} = U^{-\frac{1}{2}}$$

gegeben, so hätte man $\underset{x}{d} \dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{2} U^{-\frac{1}{2} - 1} \underset{x}{d} U = -\tfrac{1}{2} U^{-\frac{3}{2}}$. $2(x' - x)(-dx) = \dfrac{x' - x}{U^{\frac{3}{2}}} dx = \dfrac{x' - x}{r^3} dx$;

hieraus folgt für den Differentialquotienten $\dfrac{\underset{x}{d} \frac{1}{r}}{dx} =$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} &= \frac{x' - x}{r^3} \\ \text{und ebenso} \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} &= \frac{y' - y}{r^3} \\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} &= \frac{z' - z}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 36)$$

Es sollen nun noch die zweiten Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ bestimmt werden. Man erhält sofort

$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{x' - x}{r^3}\right)}{\partial x}$, das ist nach Lehrsatz III. so viel wie

$\frac{\frac{\partial (x' - x)}{\partial x} \cdot r^3 - \frac{\partial r^3}{\partial x} \cdot (x' - x)}{r^6} = -\frac{1}{r^3} - \frac{(x' - x)\frac{\partial r^3}{\partial x}}{r^6}$, wenn man nämlich erwägt, dass im ersten Theile des Zählers $\frac{\partial (x' - x)}{\partial x} = -1$ ist. — Da nun aber r^3 zunächst eine Funktion von r und dieses r selbst wieder eine Funktion von x ist, so ist nach den Formeln 18 bis 20 der Differentialquotient von r^3 nach x gleich dem Produkte des Differentialquotienten von r^3 nach r multiplicirt mit dem Differentialquotienten von r nach x; nämlich $\frac{\partial r^3}{\partial x} = \frac{d r^3}{d r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 3 r^2 \frac{\partial r}{\partial x}$, also mit Rücksicht auf Formel 35 $\frac{\partial r^3}{\partial x} = 3 r^2 \left(-\frac{x' - x}{r}\right) = -3 r (x' - x)$. In Folge dessen erhält man $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} - \frac{(x' - x)}{r^6} (-3 r (x' - (x)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{also} && \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x' - x)^2}{r^5} \\ &\text{und ebenso} && \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(y' - y)^2}{r^5} \\ & && \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(z' - z)^2}{r^5} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 37)$$

Es ist bemerkenswerth, dass die Summe $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$, welche wir durch das Symbol $\Delta \frac{1}{r}$ bezeichnen wollen, den Werth Null hat. Es ist nämlich $\Delta \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]$, also mit Rücksicht auf $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r^2$ offenbar

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3 r^2}{r^5} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

(**Die Taylor'sche Reihe auf zwei Veränderliche ausgedehnt.**) Man denke sich in $u = f(x, y)$ zunächst y als eine Constante und nur x veränderlich und zwar in $x + h$ übergehend. Man erhält dann für $u_1 = f(x + h, y)$ nach Formel 24 den Ausdruck

$$u_1 = u + \frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

Lässt man nun in u_1 das y sich ändern und in $y + k$ übergehen, so erhält man durch abermalige Anwendung der Taylor'schen Reihe für $u_2 = f(x + h, y + k)$ den Ausdruck

$$u_2 = u_1 + \frac{d u_1}{dy} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^2 u_1}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 u_1}{dy^3} \cdot \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

Um nun z. B. den Werth von $\frac{d u_1}{dy}$ zu finden, muss man alle Glieder von u_1, also z. B. unter andern auch das Glied $\frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1}$ d. i. beziehungsweise $\frac{du}{dx}$ nochmals nach y differenziren; man muss nämlich vom Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$ nach x, der im Allgemeinen selbst wieder eine Funktion von x und y ist, den Differentialquotienten nach y bilden. Man erhält dabei nach der Regel

$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{\frac{ddu}{dy} dx}{dx^2} = \frac{ddu}{dy\,dx}$, da ja x von y unabhängig ist und somit das Differentiale von dx nach y gleich Null sein muss. Man schreibt dafür $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, um zugleich anzudeuten, dass man es mit zwei hintereinander ausgeführten partiellen Differentiationen zu thun hat. Ebenso bedeutet z. B. $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$ den Ausdruck, den man erhält, wenn man von u erst zweimal hintereinander den Differentialquotienten nach x und dann von diesem Resultate noch den Differentialquotienten nach y bildet. Da die Ordnung, in welcher man diese Differentiationen ausführt, wie wir bald sehen werden, gleichgiltig ist, so kann man z. B.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 39)$$

u. s. w. schreiben.

Dies vorausgeschickt, kehren wir wieder zur begonnenen

Reihenentwickelung zurück und erhalten durch Substitution des Werthes von u_1, indem wir auch hier die Bezeichnung der partiellen Differentiation anwenden,

$$u_2 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{k}{1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

$$= u + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{h}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{k}{1}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\cdot\frac{h}{1} + \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{k^2}{1.2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}\cdot\frac{h}{1} + \cdots\cdots\right]$$

$$+ \frac{k^3}{1.2.3}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \cdots\cdots\right] \text{ also}$$

$$u_2 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{h}{1} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{k}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\cdot hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \cdots, \text{ d. h.}$$

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{h}{1} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{k}{1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \cdots \quad .\;.\;.\;.\; 40)$$

wenn man in den Differentialquotienten wieder kurzweg f statt $f(x, h)$ schreibt. Man kann diesen Ausdruck auch symbolisch in folgender Art darstellen:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot k\right)^1 f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot k\right)^2 f(x, y) + \cdots\cdots$$

$$= f(x, y)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot k\right)^0 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot k\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot k\right)^2 + \cdots\cdots\right] \quad .\;.\;.\; 41)$$

wenn man, wie üblich, die Faktorielle $1.2.3\ldots.n$ allgemein mit $n!$ bezeichnet, eine Form, welche sich leicht auf mehr als zwei Veränderliche ausdehnen liesse, indem man z. B. innerhalb der runden Klammern noch $\frac{\partial}{\partial z}\cdot l$ für eine dritte um l wachsende Veränderliche z hinzufügte u. s. w.

Zu demselben Resultate, Formel 40, muss man auch kommen, wenn man zuerst y in $y+k$ und dann x in $x+h$

übergehen lässt, da man schliesslich ebenfalls zu dem Werthe $f(x+h, y+k)$ gelangt; nur hätte man bei Wiederholung der Rechnung in dieser Reihenfolge z. B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ statt $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ u. s. w. erhalten, woraus eben die Gleichgiltigkeit der Reihenfolge der Differentiationen, auf die wir bereits oben (Formel 39) hingewiesen haben, erhellt.

Bleibt man bei zwei Veränderlichen stehen und lässt h und k in's Unendliche abnehmen, so findet man als Grenzwerth des Differentiales, d. h. mit Rücksicht auf das relative Verschwinden der höheren Differentialien

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad \ldots \ldots \quad 42)$$

wie oben Formel 32 für ein specielles Beispiel leicht ersichtlich ist. Häufig bedient man sich auch der Ausdrucksweise

$$df(x, y) = du = M dx + N dy \quad \ldots \quad 43)$$

wobei man zu verstehen hat:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ und mit Rücksicht auf Formel 39}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad 44)$$

welche Gleichung immer zutreffen muss, wenn $M dx + N dy$ ein vollständiges Differentiale der unabhängigen Veränderlichen x und y ist und daher auch als ein Kennzeichen dieses Falles dient.

(**Beispiel.**) Das Gesagte soll noch durch ein populäres Beispiel versinnlicht werden. Es befinde sich Jemand auf der Oberfläche eines Hügels, deren Gestalt durch die Gleichung $z = f(x, y)$ dargestellt sein mag, wobei z die vertikale Höhe des Standpunktes über der als horizontale Basis angenommenen xy-Ebene bedeutet, während x den horizontalen Abstand des Standpunktes von der senkrecht zur Mittagslinie aufgestellten yz-Ebene nach Norden zu und y den östlichen Horizontalabstand des Standpunktes von der dem Meridiane parallelen Ebene der xz angibt. Macht man einen Schritt, dessen Horizontalprojektion dx ist, nördlich, so erfährt die Höhe des Standpunktes eine entsprechende Aenderung $d_x z$. Hätte man

einen Schritt dy nach Osten gemacht, so wäre die entsprechende Aenderung des Standpunktes $\underset{y}{dz}$ gewesen. Macht man nun aber einen Schritt nördlich und dann noch einen Schritt östlich, so ändert man dabei den Standpunkt um einen Totalbetrag dz, der sich, wie die Taylor'sche Entwickelung zeigt, desto genauer durch die Summe $\underset{x}{dz} + \underset{y}{dz}$ darstellen lässt, je kleiner die Aenderungen dx und dy angenommen werden. Es ist also auch hier

$$dz = \underset{x}{dz} + \underset{y}{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

d. h. die totale Aenderung einer Funktion von mehreren Veränderlichen gleich der Summe der partiellen Aenderungen in Bezug auf die einzelnen Veränderlichen.

(**Geometrische Bedeutung der Differentialquotienten.**) Wird eine ebene Curve uv Fig. 5 durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt, von welcher $Mm = ds$ ein unendlich kleines zwischen den Ordinaten $y = f(x)$ und $y + dy = f(x + dx)$ gelegenes Element ist, so erhalten wir durch die Verlängerung dieses Curvenstükes eine Tangente Mt, die mit der Abscissenaxe einen gewissen Winkel α einschliesst. Dieser Winkel ist offenbar gleich dem Winkel mMn in dem von ds, dx und dy gebildeten rechtwinkligen Dreiecke, wesshalb

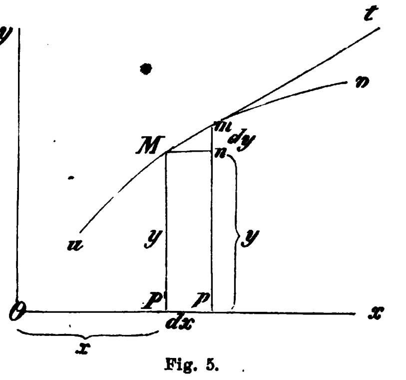


Fig. 5.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

sein muss. Hieraus folgt, dass der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ (selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass man sich darin die Werthe $x = OP$ und $y = MP$ für den betrachteten Punkt M der Curve eingesetzt denkt) die trigonometrische Tangente des Winkels vorstellt, welchen die im betrachteten Punkte gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet.

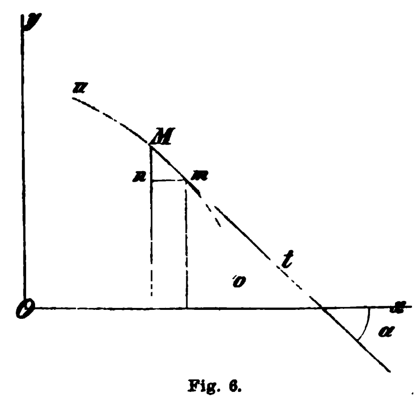


Fig. 6.

Wäre der Curvenast absteigend wie in Fig. 6, so wäre dy und somit auch $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ negativ. Man erkennt also aus dem positiven oder negativen Vorzeichen des ersten Differentialquotienten der Curvenordinate, ob die Curve an der betrachteten Stelle im Steigen oder im Fallen ist.

Ist $\frac{dy}{dx} = 0$, so ist die Berührungslinie zur Abscissenaxe parallel, was sowohl in dem Falle stattfinden kann, dass die Curvenordinate einen grössten (MP) oder kleinsten ($M'P'$) Werth erreicht, wie in Figur 7, als auch an einem sogenannten

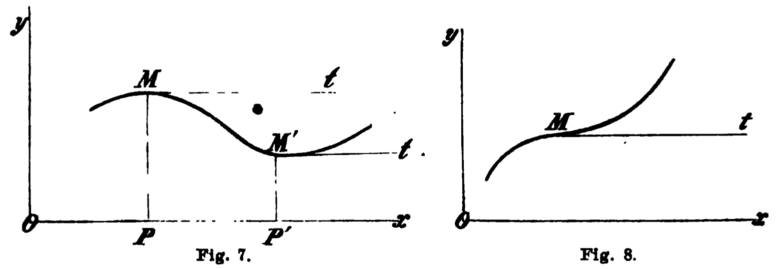


Fig. 7. Fig. 8.

Inflexions- oder Wendepunkte beim Uebergange aus der concaven Krümmung in die convexe (Fig. 8) oder umgekehrt.

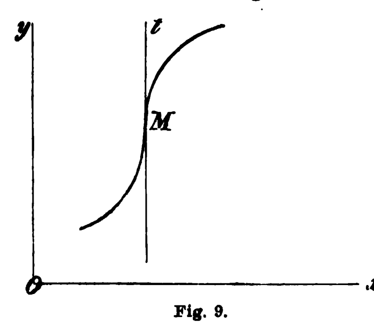


Fig. 9.

Doch kann an einem Wendepunkte auch $\frac{dy}{dx} = \infty$ werden, entsprechend einer zur Abscissenaxe senkrechten Berührungslinie, wie z. B. in Fig. 9.*) Um über den Verlauf einer Curve näheren Aufschluss zu bekommen, ist auch die Untersuchung des zweiten Differen-

*) Die Werthe $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \infty$ können auch noch in anderen hier nicht näher zu erörternden Fällen eintreten, wenn nämlich zwei

tialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ erforderlich. Aus den Betrachtungen bei Ableitung der Formel 23 für $f(x + n\,dx)$ geht bereits hervor, dass bei einer gegen die Abscissenaxe convexen Curve (Fig. 2) $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist und auch umgekehrt aus dem positiven Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf die Convexität der Curve an der untersuchten Stelle (man muss sich nämlich in $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Coordinaten des in Betracht gezogenen Curvenpunktes eingesetzt denken) geschlossen werden kann, vorausgesetzt, dass die Curve oberhalb der Abscissenaxe verläuft, d. h. die Ordinaten an den betrachteten Stellen positiv sind; für negative Ordinaten zeigt ein negatives $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Convexität gegen die Abscissenaxe an. Bei einer gegen die Abscissenaxe concaven Curve nehmen die Aenderungen erster Ordnung der aufeinanderfolgenden Ordinaten ab und ist sonach $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so dass bei positivem y aus dem negativen Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf die Concavität der untersuchten Curve an der betrachteten Stelle geschlossen werden kann und das Gegentheil bei negativen Ordinaten.

So erhält man z. B. aus der Gleichung der Parabel $y^2 = ax$ zunächst $2y\,dy = a\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ und durch nochmalige Differentiation dieses Ausdruckes nach x (wobei also, weil $\frac{a}{2y}$ als eine Funktion von y, und y selbst wieder als eine Funktion von x erscheint, nach Formel 18 vorzugehen ist) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{4y^2} \cdot \frac{a}{2y} = -\frac{a^2}{4y^3}$, welcher Ausdruck erkennen lässt, dass die Curve sowohl auf Seite der positiven als auf Seite der negativen y concav gegen die Abscissenaxe verläuft, weil $\frac{d^2y}{dx^2}$ im ersten Falle negativ, im zweiten positiv ist.

Allgemein kann man also sagen, dass ein positives oder negatives $y\frac{d^2y}{dx^2}$ beziehungsweise Convexität oder Concavität anzeigt.

Curvenäste in eine sogenannte Spitze zusammenlaufend, eine gemeinschaftliche horizontale oder vertikale Tangente haben.

Der Relation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ entspricht ein Wendepunkt. Doch beschränken wir uns darauf, die Hilfsmittel zur Untersuchung des Laufes ebener Curven insoweit besprochen zu haben, als es zum besseren Verständnisse des nächstfolgenden Paragraphen zweckmässig schien.

Zur Erläuterung der Bedeutung der Differentialquotienten diene noch die Bemerkung, dass $\frac{dy}{dx}$ als Ausdruck der Geschwindigkeit betrachtet werden kann, mit welcher der Funktionswerth y bei zunehmendem x wächst und, könnte man noch hinzufügen, $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Ausdruck der Beschleunigung (Geschwindigkeit der Geschwindigkeitszunahme) dieses Wachsthums.

(**Maximum und Minimum.**) In vielen Fällen nimmt $y = f(x)$ für einen bestimmten Werth von x einen grössten oder kleinsten Werth an, so dass, wenn z. B. x_1 jenes gewisse x ist, die Nachbarwerthe $f(x_1 + h)$ und $f(x_1 - h)$ im ersten Falle beide kleiner und im zweiten Falle beide grösser sind als $f(x_1)$, wenn h eine sehr kleine Aenderung von x_1 bedeutet.

Es ist wichtig, die Bedingungen eines solchen Maximums oder Minimums zu kennen. Wir können sie zunächst so aussprechen, dass im ersten Falle $f(x_1 \pm h) - f(x_1)$ negativ, im zweiten Falle positiv sein muss. Die Entwickelung mit Hilfe der Taylor'schen Reihe (Formel 24) gibt

$$f(x_1+h)-f(x_1)=f'(x_1)\frac{(+h)}{1}+f''(x_1)\frac{(+h)^2}{1.2}+f'''(x_1)\frac{(+h)^3}{1.2.3}+\cdots$$

$$f(x_1-h)-f(x_1)=f'(x_1)\frac{(-h)}{1}+f''(x_1)\frac{(-h)^2}{1.2}+f'''(x_1)\frac{(-h)^3}{1.2.3}+\cdots$$

Wir denken uns nun h so klein genommen, dass das erste Glied $\pm f'(x_1)h$ grösser wird als die Summe aller folgenden. (Siehe die Erörterungen über das „Unendlichkleine“.) In diesem Falle wird die Summe aller Glieder der Reihe positiv oder negativ ausfallen, je nachdem das erste Glied positiv oder negativ ist.

Soll der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen für jedes noch so kleine (nach Belieben positiv oder negativ gewählte) h immer negativ sein, oder, was zu einem Minimum erforderlich wäre, immer positiv, so setzt dies voraus, dass der Faktor

$f'(x_1)$, mit welchem h multiplicirt erscheint, gleich Null ist; denn, wäre derselbe von 0 verschieden, so würde das erste Glied der Reihe und somit auch der durch die Summe aller Glieder vorgestellte Werth des Ausdruckes links vom Gleichheitszeichen das Vorzeichen wechseln, je nachdem man ein positives oder negatives h einsetzt. Die Bedingung eines Maximums oder Minimums ist also jedenfalls, dass

$$f'(x_1) = 0$$

d. h. der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, wenn man darin den Werth x_1, für welchen y ein Maximum oder Minimum wird, einsetzt, gleich Null werden muss. Man findet also diesen Werth x_1 (oder, wenn es deren mehrere gibt, diese Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots$) wenn man die Gleichung

$$f'(x) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 47)$$

ansetzt und auflöst, vorausgesetzt, dass die Funktion überhaupt ein Maximum oder Minimum hat, was natürlich nicht immer der Fall ist. So fände man z. B. für $y = \sqrt{px}$ aus $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = 0$, $x = \infty$; d. h. es gibt keinen endlichen Werth, für welchen y (die Parabelordinate) ein Maximum oder Minimum hätte. Dagegen findet man z. B., dass der bekannte Ausdruck $s = \frac{xe}{x^2 \frac{u}{n} + r}$ für die Stromstärke einer n-elementigen zu x Elementen combinirten Batterie beim äusseren Widerstande r den Differentialquotienten $\frac{ds}{dx} = e \frac{\left(r - \frac{u}{n} x^2\right)}{\left(x^2 \frac{u}{n} + r\right)^2}$ gibt, welcher für $\frac{u}{n} x^2 = r$ oder $x \frac{u}{n : x} = r$, wenn nämlich der Batteriewiderstand dem äusseren Widerstande gleicht, gleich Null wird (e und u bedeuten hier elektromotorische Kraft und Widerstand eines einfachen Elementes). In diesem Beispiele ist zugleich aus der Natur der Sache einleuchtend, dass nur von einem Maximum, nicht aber von einem Minimum für $x = \sqrt{\frac{nr}{u}}$ die Rede sein kann.

Wo diese Entscheidung zweifelhaft ist, gibt das Vorzeichen

des zweiten Differentialquotienten Aufschluss. Ist nämlich der erste Null, so wird der ganze Ausdruck $f(x_1 \pm h) - f(x_1)$ negativ oder positiv, d. h. $f(x_1 \pm h) < f(x_1)$ oder $f(x_1 \pm h) > f(x_1)$ sein, je nachdem $f''(x_1) \frac{(\pm h)^2}{1 \, . \, 2}$, welches unter den gemachten Voraussetzungen wieder grösser ist als die Summe aller folgenden Glieder, negativ oder positiv ist, was wieder davon abhängt, ob $f''(x_1)$ negativ oder positiv ist, da ja $\frac{(\pm h)^2}{1 \, . \, 2}$ unter allen Umständen positiv sein muss. Im ersten Falle hat man es mit einem Maximum, im letzteren mit einem Minimum zu thun. In der That überzeugt man sich auch im obigen Beispiele leicht, dass der zweite Differentialquotient negativ ist. Wäre auch der zweite Differentialquotient für x_1 gleich Null, so hätte man auf den dritten und vierten überzugehen und auf diese dieselben Regeln anzuwenden, welche soeben für den ersten und zweiten angegeben worden sind.

Das Gesagte findet eine anschauliche Erläuterung in den vorausgegangenen Betrachtungen über den Lauf ebener Curven. Figur 7 stellt den Fall eines Maximums und eines Minimums des Ordinatenwerthes dar. Die Bezeichnung eines grössten oder kleinsten Werthes ist immer nur als eine relative im Vergleiche mit den Nachbarwerthen aufzufassen, denn bei der Vergleichung der Maxima und Minima unter sich kann es wohl vorkommen, dass ein Maximalwerth kleiner ist als ein Minimalwerth, wie z. B. wenn in Fig. 7 $M'P'$ grösser als MP wäre.

(**Integralrechnung.**) In dem allgemeinen Ausdrucke $df(x) = f'(x)dx$ ist der Differentialquotient $f'(x)$ selbst wieder eine Funktion von x. Schreiben wir anstatt $f'(x)$ einfacher $\varphi(x)$, so erhält die vorliegende Gleichung die Gestalt $df(x) = \varphi(x)dx$. Nehmen wir nun an, es sei irgend ein Ausdruck von der Form $\varphi(x)dx$, nämlich irgend eine Funktion $\varphi(x)$ von x multiplicirt mit dx gegeben, so kann man nach derjenigen Funktion $f(x)$ fragen, welche $\varphi(x)$ zum Differentialquotienten, also $\varphi(x)dx$ zum Differentiale hat. Ist diese fragliche Funktion nicht bekannt, so kommt es auf die Kenntniss der Rechnungsmethoden an, sie ausfindig zu machen. Diese Rechnungsmethoden bilden den Gegenstand der sogenannten Integralrechnung, so wie man denn auch die gesuchte Funktion $f(x)$ die Integralfunktion von $\varphi(x)$ nennt, wenn $\varphi(x)$ der Differential-

quotient von $f(x)$ ist, also $df(x) = \varphi(x)dx$. So wie die Ableitung von $\varphi(x)dx (= f'(x)dx)$ aus $f(x)$ „Differenziren" heisst, so heisst die Ermittelung von $f(x)$ aus $\varphi(x)dx$ „Integriren". Ersteres wird, wie bekannt, durch $df(x) = \varphi(x)dx$ angezeigt, letzteres durch $\int \varphi(x)dx = f(x)$, wobei man das Zeichen $\int$ ein Integralzeichen nennt. Es ist aus dem Buchstaben S hervorgegangen, aus Gründen, die später erläutert werden sollen.

Weil das Differentiale einer Constanten C Null ist, erhält man durch Differentiation von $f(x) + C$ ebenso $\varphi(x)dx$, wie durch Differentiation von $f(x)$ allein. Man kann also auch schreiben

$$\int \varphi(x)dx = f(x) + C \quad \ldots \ldots \quad 48)$$

Diese Formel ist die allgemeinere und um derselben Rechnung zu tragen, muss man sich bei allen im Folgenden abgeleiteten Integralformeln noch eine Constante hinzugefügt denken, wie sogleich gezeigt werden wird.

In manchen Fällen ist es leicht, das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes mit Hilfe der bereits mitgetheilten Differentialformeln unmittelbar anzugeben. Würde z. B. der Ausdruck

$$\varphi(x)dx = \cos x\,dx$$

zum Integriren vorliegen, so braucht man sich nur an die Differentialformel 10 zu erinnern, nämlich $d\sin x = \cos x\,dx$, um einzusehen, dass $\sin x$ die gesuchte Integralfunktion $f(x)$ ist, wodurch man also mit Beifügung der vorhin erwähnten Constanten C die Integralformel

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \quad \ldots \ldots \quad 49)$$

erhält. Ebenso leicht findet man aus 11

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \quad \ldots \ldots \quad 50)$$

ferner aus 12 und 13 beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \ldots \ldots \quad 51)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot. x + C \quad \ldots \ldots \quad 52)$$

In gleicher Weise braucht man die Formeln 14, 15, 16 und 17 nur umzukehren, um

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.} \sin x + C = -\text{arc.} \cos x + C \quad . \quad 53)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.}\operatorname{tg} x + C = -\text{arc.}\cot x + C \quad . \quad . \quad 54)$$

zu erhalten. Weiterhin gibt Formel 7 unmittelbar

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l} x + C = M \log x + C = \frac{\log x}{m} + C \quad . \quad . \quad 55)$$

Setzt man in Formel 9, nämlich $dx^n = n x^{n-1} dx$ den Exponenten $n - 1 = m$, also $n = m + 1$, so wird $dx^{m+1} = (m + 1) x^m dx$ oder $\left(\frac{1}{m+1}\right) dx^{m+1} = x^m dx$, woraus folgt $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.
Man kann mit gleichem Rechte schreiben

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Desgleichen folgt aus Formel 8, nämlich

$$da^x = \mathrm{l} a \cdot a^x dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l} a} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57)$$

Schreibt man in der Formel 53 $\frac{x}{a}$ statt x, so erhält man

$$\int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{\frac{1}{a}\, dx}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc.}\sin \frac{x}{a} + C \quad 58)$$

Auf gleiche Weise findet man aus 54

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\ \text{arc.}\operatorname{tg} \frac{x}{a} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

Die Beifügung der Integrationsconstante gestattet in manchen Fällen gewisse Umgestaltungen, auf die wir aufmerksam machen wollen. So kann man z. B. in

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l} x + C$$

die Constante auch als Logarithmus, nämlich einer anderen Constanten a, also $C = \mathrm{l} a$, erscheinen lassen, wodurch man erhält

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l} a x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

Man kann dafür auch schreiben (siehe Formel 3)

$$e^{\int \frac{dx}{x}} = ax \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

wenn diese Form vielleicht für weitere Transformationen zweckdienlich ist u. s. w.

In gewissen Fällen lässt sich die Integrationsconstante aus der Natur der Aufgabe bestimmen. Erhellt z. B. aus der Beschaffenheit des vorliegenden Problems, dass $\int \varphi(x)\, dx = f(x) + C$ für einen bestimmten Werth von x, der x_0 heissen soll, Null werden muss, so erhält man

$$f(x_0) + C = 0$$

also $C = -f(x_0)$ und somit

$$\int \varphi(x)\, dx = f(x) - f(x_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62$$

Wenn vom Integrale $\int \varphi(x) dx$ aus der Natur des Problems bekannt ist, dass es für $x = a$ den Werth A, für $x = b$ den Werth B annimmt, so folgt aus $A = f(a) + C$ und $B = f(b) + C$ unmittelbar

$$B - A = f(b) - f(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

wofür man auch

$$\int_a^b \varphi(x) dx = f(b) - f(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64)$$

zu schreiben pflegt, indem man dem Integralzeichen oben den Endwerth (b) und unten den Anfangswerth (a) der Veränderlichen beifügt, durch deren Substitution in das Integral $f(x) + C$ man den Endwerth $f(b) + C$ und Anfangswerth $f(a) + C$ des Integrals erhält, deren Differenz eben durch das Symbol $\int_a^b$ vorgestellt wird, z. B.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

oder

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\, b - \mathrm{l}\, a = \mathrm{l}\, \frac{b}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66)$$

Durch die Ermittelung einer solchen Integraldifferenz, d. h. eines innerhalb gewisser Grenzen b und a der Veränderlichen genommenen Integrals, fällt die Constante fort. Man nennt

ein solches Integral ein **bestimmtes** oder **begrenztes**, wobei der **Endwerth** b der Veränderlichen die **obere** und der **Anfangswerth** a die **untere** Grenze der Integration ist. Integrirt man in umgekehrter Reihenfolge, d. i. von b als Anfangswerth ausgehend und a als Endwerth betrachtend, so erhält man die durch das Symbol $\int_b^a \varphi(x)\,dx$ angezeigte Differenz $f(a) - f(b)$, welche offenbar $= -(f(b) - f(a)) = -\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist. Es folgt hieraus ein allgemeiner für das Vertauschen der Integrationsgrenzen giltiger Lehrsatz, der sich durch die Formel

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\int_b^a \varphi(x)\,dx \quad \text{. . . . . 67)}$$

ausdrücken lässt.

Von dem bestimmten Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

unterscheidet sich das **allgemeine** Integral

$$\int \varphi(x)\,dx = f(x) + C$$

durch eine zweifache Unbestimmtheit; fürs erste hinsichtlich des noch willkürlichen Werthes der Constanten C und zweitens der Veränderlichen x. Legen wir der Constanten C bestimmte Werthe C_1, C_2, C_3 . . . . . bei, so erhalten wir dadurch ebenso viele, theilweise bestimmte, wir wollen sagen: **partikuläre** Integrale.

$$f(x) + C_1; \quad f(x) + C_2; \quad f(x) + C_3 \text{ u. s. w.,}$$

die vollständig bestimmt werden, wenn wir auch noch für die Veränderliche x einen bestimmten Zahlenwerth einsetzen.

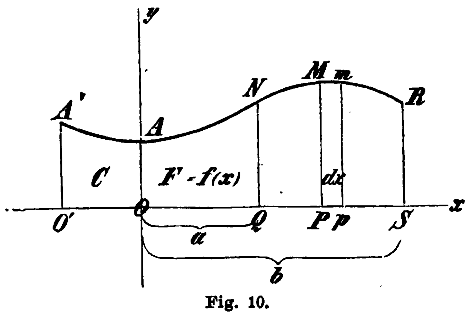


Fig. 10.

(Das Integral als Summe.) Denkt man sich die Funktion $y = \varphi(x)$ durch eine Curve $A'R$ (Fig. 10) dargestellt, so kann man ein zwischen zwei um dx von einander abstehenden Ordinaten MP und mp enthaltenes Flächenele-

ment, welches offenbar das Rechteck $y\,dx = \varphi(x)\,dx$ zur Grenze hat, als das Differentiale einer z. B. von AO aus gemessenen Fläche $AOMP = F = f(x)$ ansehen, welche Fläche eben auch eine Funktion von x ist; wobei man sich, um die Betrachtung noch allgemeiner zu halten, zur Fläche $AOMP = f(x)$ allenfalls noch eine willkürliche Constante C in Form eines constanten Flächenstückes $A'O'AO$ hinzugefügt, das heisst, die betrachtete Fläche statt von AO aus, vielmehr von $A'O'$ aus gemessen denken kann. Betrachtet man nun in der That $MPmp = \varphi(x)\,dx$ als Differentiale von $AOMP + A'O'AO = f(x) + C$ also

$$\varphi(x)\,dx = d(f(x) + C)$$

so kann man umgekehrt

$$\int \varphi(x)\,dx = f(x) + C$$

schreiben. Dieses Integral nimmt aber für $x = OQ = a$ offenbar den Werth $AONQ + A'O'AO = f(a) + C$ und für $x = OS = b$ den Werth $AORS + A'O'AO = f(b) + C$ an, deren Differenz $f(b) - f(a)$, da nun die Constante fortfällt, den Flächenraum $NQRS$ bedeutet, also die Summe aller Flächenelemente $\varphi(x)\,dx$, in welche man diesen Flächenraum $f(b) - f(a)$ sich zerlegt denken kann. Es hat demnach die Differenz der Integralwerthe $(f(b) + C) - (f(a) + C)$, die man, wie bereits gesagt, durch das Symbol $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ausdrückt, die Bedeutung jener Summe. Ebenso hat das allgemeine Integral $\int \varphi(x)\,dx = f(x) + C$ die Bedeutung der Summe aller Flächenelemente zwischen zwei noch nicht festgestellten Ordinaten $A'O'$ und MP und kann sonach überhaupt jede Integration als eine Summirung von Differentialien $\varphi(x)\,dx$, sei es innerhalb noch willkürlicher oder bereits festgestellter Grenzen, gedacht werden, in welcher Auffassung die Wahl des Summenzeichens zum Integralzeichen ihre Berechtigung findet.

Eine Summirung von der im vorstehenden Beispiele betrachteten Art heisst, weil sie zur Bestimmung eines Flächenraumes führt, eine Quadratur. Dabei hat die Curvenordinate $y = \varphi(x)$ die Bedeutung eines Differentialquotienten der betrachteten Fläche $f(x)$ oder $f(x) + C$, wie aus $d(f(x) + C) = \varphi(x)\,dx = y\,dx$ hervorgeht.

Auf ähnliche Weise lässt sich die Berechnung eines Volu-

mens $DEFQRS$ (Fig. 11), welches man sich in Elemente $MPNmpn = q\,dx$ zerlegt denkt, wobei q den Querschnitt MPN bedeutet, durchführen. Hier ist das z. B. von AOB aus gemessene veränderliche Volumen $AOBMPN$ die Funktion $f(x)$ zu der wir uns allenfalls noch ein constantes Volumen

$$A'O'B'AOB = C$$

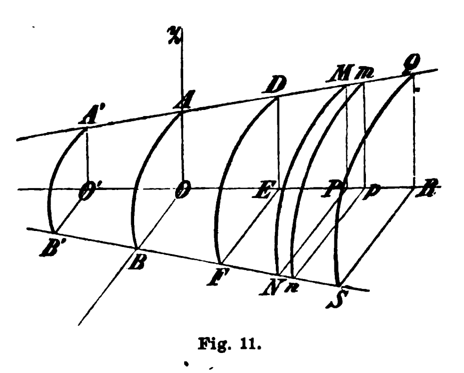


Fig. 11.

hinzugefügt denken können, um in der allgemeineren Form $f(x) + C = A'O'B'MPN$ das nunmehr von $A'O'B'$ aus gemessene Volumen darzustellen, als dessen Differentiale das Element $MPNmpn = q\,dx = \varphi(x)\,dx$ erscheint, wobei sonach der Querschnitt q die Bedeutung des Differentialquotienten $\varphi(x)$ hat. Für die Grenzen $x = OE = a$ und $x = OR = b$ erhält man dann wieder

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) - f(a) = DEFQRS.$$

Wir nennen eine so bewerkstelligte Volumsbestimmung eine **Cubatur**; sie stellt sich dar als eine Summirung von Volumselementen wie $MPNmpn$ in unserem Falle.

Wir entnehmen aus diesen Beispielen zugleich folgende Bemerkung: Der Differentialquotient eines Volumens ist ein Querschnitt desselben, der Differentialquotient einer Fläche ist eine Ordinate derselben und, können wir noch hinzufügen, der Differentialquotient einer Ordinate ist die Neigungstangente der betreffenden Berührungslinie, wie wir schon bei einer früheren Gelegenheit (siehe Formel 46) gesehen haben.

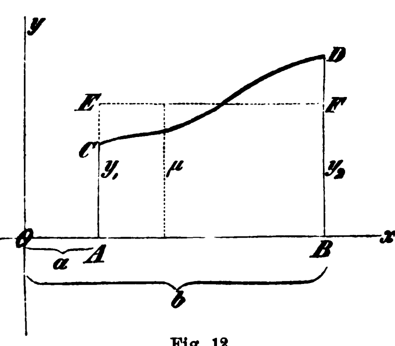


Fig. 12.

(**Mittelwerthe der Funktionen.**) Es ist oft wichtig, den Mittelwerth μ zu berechnen für eine Funktion $\varphi(x)$, deren

Werthe sich bei einem vorliegenden Problem innerhalb gewisser Grenzen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ bewegen, z. B. Fig. 12 den mittleren Ordinatenwerth μ für eine Curve $y = \varphi(x)$, deren Ordinaten innerhalb der betrachteten Strecke $y_1 = \varphi(a)$ als Anfangswerth und $y_2 = \varphi(b)$ als Endwerth erreichen, zwischen welchen die Fläche $ABCD = \int_a^b \varphi(x)dx$ liegt.

Es handelt sich hier also mit anderen Worten um die Höhe μ des Rechteckes $ABEF$, welches mit jener Fläche $ABCD$ gleichen Inhalt hat. Allgemein gesprochen kommt es also darauf an, das $\varphi(x) = \mu$ zu finden, welches der Bedingung $\int_a^b \varphi(x)dx = \mu \int_a^b dx = \mu(b-a)$ entspricht, und dieses ist offenbar

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx \quad \ldots \ldots \quad 68)$$

(**Integrale zusammengesetzter Differentialausdrücke.**) Da das Differentiale einer Summe von Funktionen nach I. gleich ist der Summe der Differentialien eben dieser Funktionen, so folgt unmittelbar, dass auch umgekehrt das Integrale einer Summe von Differentialausdrücken gleich ist der Summe der Integrale von eben diesen Differentialausdrücken

$$\begin{aligned}&\int[F(x) + f(x) + \varphi(x) + \cdots]dx \\ &= \int F(x)dx + \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx + \ldots \quad . \quad 69)\end{aligned}$$

Sehr oft lässt sich eine Integration auf die Form $\int u dv$ zurückführen, wobei u und v Funktionen von x sind. Aus $d(uv) = udv + vdu$ (Formel II) folgt aber $uv = \int udv + \int vdu$, somit ist

$$\int udv = uv - \int vdu \quad \ldots \ldots \quad 70)$$

Man kann diesen Lehrsatz, welcher das höchst wichtige und oft vorkommende Verfahren der theilweisen Integration ausspricht, auch in folgender Gestalt ausdrücken:

$$\int \varphi(x) \cdot \psi'(x)dx = \varphi(x) \cdot \psi(x) - \int \psi(x)\varphi'(x)dx \quad . \quad 71)$$

Es sei z. B. der Differentialausdruck $e^x \sin x dx$ zu integriren. Betrachtet man e^x als $\varphi(x)$ und $\sin x$ als $\psi'(x)$, so erhält man wegen $\psi(x) = -\cos x$ und $\varphi'(x) = e^x$ $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int(-\cos x)e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$.

Wendet man auf das letztere Integral dasselbe Verfahren an, so ergibt sich

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx,$$

dies oben substituirt gibt

$$\int e^x \sin x\, dx = - e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \text{ folglich}$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

(Integration von Differentialausdrücken höherer Ordnung. Wiederholte Integration nach einer Veränderlichen.) Wir betrachten zunächst einen Differentialausdruck höherer Ordnung, in welchem nur eine Veränderliche in Betracht kommt. In dem Ausdrucke $d^2 f(x) = f''(x)\, dx^2$ (Formel 22) ist $f''(x)$ im Allgemeinen selbst wieder eine Funktion von x. Bezeichnen wir sie mit $\varphi(x)$, so erscheint $d^2 f(x)$ in der Form $\varphi(x)\, dx^2$. Um aus dem letzteren Ausdrucke auf die ursprüngliche Funktion $f(x)$ zurückzukommen, deren zweimalige Differentiation den Ausdruck $\varphi(x)\, dx^2$ ergeben hat, ist eine zweimalige Integration dieses Ausdruckes erforderlich, die man durch das Symbol $\int\int \varphi(x)\, dx^2$ andeutet, und deren Sinn durch die Gleichung $\int\int \varphi(x)\, dx^2 = f(x)$ ausgedrückt wird. Diese Gleichung lässt sich aber noch allgemeiner formuliren. Es ist nämlich einleuchtend, dass man zu demselben Resultate kommt, man mag $f(x)$ allein oder $f(x) + Cx + C'$ zweimal hintereinander differenziren, wobei C und C' Constante sind. Bei der ersten Differentiation fällt C' fort und wird aus Cx das Differentiale $C dx$, welches, da dx constant ist, bei der zweiten Differentiation auch entfällt. In voller Allgemeinheit lautet also unsere Gleichung

$$\int\int \varphi(x)\, dx^2 = f(x) + Cx + C' \quad \ldots \quad 72)$$

In der That, sei $f(x) = y$, somit $\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \varphi(x)$ nach unserer Bezeichnung, so folgt $d^2 y = \varphi(x)\, dx^2$, mit dessen Integration wir uns befassen wollen. Zu dem Ende schreiben wir die letzte Gleichung in der Form $\frac{d^2 y}{dx} = \varphi(x)\, dx$, was offenbar so viel ist wie $d \frac{dy}{dx} = \varphi(x)\, dx$, weil ja, wie man sich stets gegenwärtig halten muss, dx bei allen Differentiationen als Constante behandelt wird. Durch Integration erhalten wir

$\frac{dy}{dx} = \int \varphi(x)dx + C$, woraus weiter folgt $dy = dx \int \varphi(x) dx + C dx$ und somit durch abermalige Integration

$$\left.\begin{array}{ll} & y = \int dx \int \varphi(x) dx + Cx + C' \\ \text{oder} & y = \iint \varphi(x) dx^2 + Cx + C' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

Man kann aber auch schreiben $\iint \varphi(x) dx^2 = \int dx \int \varphi(x) dx = y - Cx - C'$ und wenn man hierin statt y wieder $f(x)$ und statt $-C$ und $-C'$ wieder die Symbole C und C', die ja nach Belieben positive oder negative Grössen bedeuten können, einsetzt

$$\iint \varphi(x) dx^2 = \int dx \int \varphi(x) dx = f(x) + Cx + C' \quad . \quad 74)$$

Hier bedeutet also $f(x)$ das unbestimmte Integral, wie es sich, mit Weglassung der Integrations-Constanten, durch Ausführung der im Symbol $\int dx \int \varphi(x) dx$ angezeigten Integrationen unmittelbar ergibt.

Aehnliche Schlussfolgerungen führen zu dem Ergebnisse

$$\iiint \varphi(x) dx^3 = \int dx \int dx \int \varphi(x) dx = f(x) + Cx^2 + C'x + C'' \; . \; 75)$$

Es ist ersichtlich, dass so viele Constante in die Rechnung eintreten, als Integrationen vorgenommen werden. Die Constanten erscheinen der Reihe nach mit den absteigenden Potenzen von x multiplicirt.

(**Integration nach mehreren Veränderlichen.**) Aehnlich verfährt man bei der Integration höherer Differentialausdrücke mit mehreren Veränderlichen, wie z. B. $\varphi(x,y) dx dy$. Ein Ausdruck dieser Art ergibt sich, wenn eine Funktion $f(x,y)$ einmal partiell nach x und einmal partiell nach y differenzirt wird. Der dabei entstehende Differentialquotient $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ ist im Allgemeinen selbst wieder eine Funktion von x und y, wesshalb man das Differentiale $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} dx dy$ auch in der Form $\varphi(x,y) dx dy$ schreiben kann. Eine zweimalige Integration, indem man zunächst y als constant ansieht und nur bezüglich x integrirt und sodann, x als constant ansehend, nur nach y integrirt, führt auf die ursprüngliche Funktion $f(x,y)$ zurück, durch deren zweimalige Differentiation $\varphi(x,y) dx dy$ entstanden ist. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass bei einer Differentiation nach x allein eine etwa hinzugefügte beliebige Funktion $\psi(y)$ von y allein fortfällt und daher umgekehrt bei der Integration nach x allein wie eine Integrationsconstante hinzu-

gefügt werden kann. Aus gleichem Grunde kann bei der Integration nach y allein eine beliebige Funktion $\chi(x)$ von x allein hinzugefügt werden. So erhält man zunächst nach x integrirend $\int\varphi(x,y)\,dx = F(x, y) + \psi(y)$ und sodann nach y integrirend

$$\int dy \int\varphi(x,y)\,dx = \int F(x,y)\,dy + \int\psi(y)\,dy = f(x,y) + \Phi(y) + \chi(x).$$

Indem man endlich die übliche Bezeichnung $\iint\varphi(x,y)\,dx\,dy$ einführt, erhält man

$$\iint\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int dy\,\varphi(x,y)\,dx = f(x,y) + \Phi(y) + \chi(x). \qquad 76)$$

Hier ist $f(x,y)$ wieder das durch die Ausführung der in $\int dy \int\varphi(x,y)\,dx$ angezeigten Integrationen unmittelbar erhaltene unbestimmte Integral. Für dieses gilt also die Formel

$$\iint\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int dy \int\varphi(x,y)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 77)$$

wobei, wie wir sogleich hinzufügen wollen, leicht ersichtlich ist, dass analog für drei Veränderliche

$$\iiint\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int dz \int dy \int\varphi(x, y, z)\,dx \quad . \quad 78)$$

zu setzen wäre.

Es sei beispielsweise $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = b$; so erhält man $u = \iint b\,dx\,dy$. $= \int dy \int b\,dx = \int bx\,dy = bxy$, oder vielmehr $u = bxy + \Phi(y) + \chi(x)$. — Wären ausserdem noch die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = 2cy + bx$ gegeben, d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 2ax\,dx + by\,dx \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 2cy\,dy + bx\,dy, \text{ so}$$

erhielte man durch Integration beziehungsweise $u = ax^2 + bxy + \Phi(y)$ und $u = cy^2 + bxy + \chi(x)$, woraus ersichtlich wird, dass die früher willkürlichen Funktionen $\Phi(y)$ und $\chi(x)$ durch die hinzugefügten Bedingungsgleichungen nunmehr folgende Bedeutungen erhalten

$\Phi(y) = cy^2$ und $\chi(x) = ax^2$. Auf diese Art wird die Integralfunktion u in folgender Weise bestimmt: $u = ax^2 + bxy + cy^2$.

(**Reihenfolge der Integrationen.**) Bei der Integration solcher Ausdrücke innerhalb bestimmter Grenzen ist zu beachten, ob x und y von einander unabhängig sind oder nicht. Um dies an einem Beispiele zu erläutern, sei die Aufgabe gestellt, die Integration $\iint dx\,dy$, wobei $dx\,dy$ das Flächenelement

abcd (Fig. 13) vorstellt, für den ganzen Flächenraum Okl auszuführen, der zwischen den Coordinaten $Ol = x_1$, $kl = y_1$ und dem Curvenstücke Ok liegt, welches einer Parabel $y^2 = px$ angehören mag. Die Rechnung kann nun entweder in der Art geführt werden, dass man zunächst alle Flächenelemente eines Vertikalstreifens $anhi = y\,dx = dx\int_0^y dy$ addirt und dann alle inner-

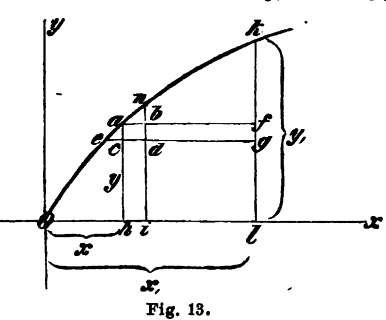


Fig. 13.

halb des Abscissen-Intervalles o und x_1 liegenden Vertikalstreifen summirt, wodurch $Okl = \int_0^{x_1} dx \int_0^y dy = \int_0^{x_1} dx \cdot y = \int_0^{x^1} dx \cdot \sqrt{px}$ $= \sqrt{p}\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{p} \cdot x_1^{\frac{3}{2}}$ wird, was mit Rücksicht auf $y_1^2 = px_1$ auch in der Form $\frac{2}{3}x_1 y_1$ geschrieben werden kann; — oder in der Art, dass man zunächst die Flächenelemente eines Horizontalstreifens $aefg = (x_1 - x)\,dy = dy\int_x^{x^1} dx$ addirt und sodann alle innerhalb des Ordinaten-Intervalles o und y_1 in Betracht kommenden Horizontalstreifen zusammenfasst, wodurch man $Okl = \int_0^{y_1} dy \int_x^{x_1} dx = \int_0^{y_1} dy\,(x_1 - x) = \int_0^{y_1} x_1\,dy - \int_0^{y_1} x\,dy$ $= x_1 y_1 - \int_0^{y_1} \frac{y^2}{p}\,dy = x_1 y_1 - \frac{1}{3}\frac{y_1^3}{p}$ erhält, was wegen $\frac{y_1^2}{p} = x_1$ den Werth $x_1 y_1 - \frac{1}{3}x_1 y_1 = \frac{2}{3}x_1 y_1$, wie oben, gibt. Man sieht hieraus, dass $Okl = \int_0^{x_1} dx \int_0^y dy$ oder $= \int_0^{y_1} dy \int_x^{x_1} dx$, dass also die Integrationsgrenzen von der Reihenfolge der Integrationen abhängen, wenn, wie im betrachteten Beispiele, die Veränderlichen nicht unabhängig von einander, sondern durch eine Relation $y = f(x)$, z. B. hier $y = \sqrt{px}$ verknüpft sind. Dies ist nicht der Fall, wenn x und y von einander unabhängig sind, wie z. B. in dem Falle, wenn bei der auszuführenden Quadratur statt der Curve $y^2 = px$ etwa eine im Abstande a von der Abscissenaxe parallele Gerade (Fig. 14), der Gleichung $y = a$ entsprechend, gegeben wäre. Man erhält hier für $\int\int dx\,dy$

bei Summirung der Vertikalstreifen $\int\limits_0^{x_1} dx \int\limits_0^{y_1} dy = x_1 y_1$ und bei Summirung der Horizontalstreifen $\int\limits_0^{y_1} dy \int\limits_0^{x_1} dx = y_1 x_1$; es sind also hier die Grenzen von der Reihenfolge der Integrationen unabhängig.

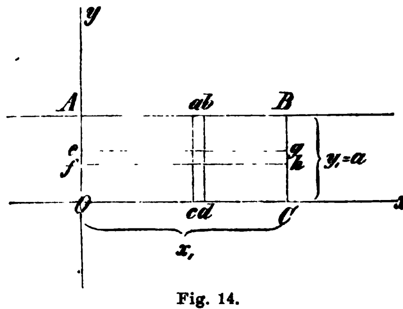


Fig. 14.

Dieselben Principien kommen mit Rücksicht auf drei Veränderliche in Anwendung, wenn es sich z. B. um die Berechnung eines von gegebenen Flächen begrenzten Volumens $\iiint dx\,dy\,dz$ handelt, welches man sich in Raumelemente $dx\,dy\,dz$ zerlegt denkt, die man zunächst einer Coordinatenaxe parallel, zu Elementarprismen, und diese dann wieder zu Schichten, einer Coordinatenebene parallel liegend, zusammenfassen kann, welche Schichten dann schliesslich das Volumen geben.

(**Integration eines vollständigen Differentialausdruckes mit zwei unabhängigen Veränderlichen.**) Für $u = f(x, y)$ ist $du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, oder $du = M dx + N dy$, wenn man $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ setzt, wobei ferner nach Formel 39 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ d. i. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ sein wird. — Aus $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, oder was dasselbe ist, $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, lässt sich, indem man nach x integrirt, ein Ausdruck für u ableiten. Dabei beachten wir vorerst, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$, wie die nach Formel 32 folgenden Erläuterungen darthun, die Bedeutung hat: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\underset{x}{du}}{dx}$, es ist also $\underset{x}{du} = M dx$ und die nach x ausgeführte Integration liefert daher, mit Rücksicht auf die der Formel 76 vorausgeschickten Bemerkungen, $u = \int M dx + \psi(y)$, wobei $\psi(y)$ eine die Integrationsconstante vertretende Funktion von y ist, um deren Bestimmung es sich nunmehr handelt. Zu dem Ende differenziren wir die soeben erhaltene Gleichung nach y und erhalten $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int M dx}{\partial y} + \frac{d\psi(y)}{dy}$, wobei

wir beachten, dass die Zeichen d und $\int$ im ersten Gliede nach dem Gleichheitszeichen sich aus dem Grunde nicht aufheben, weil die Integration nach x, die Differentiation aber nach y erfolgt. Wegen $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ erhalten wir $\frac{d\psi(y)}{dy} = N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}$, oder $d\psi(y) = \left(N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}\right) dy$, somit durch Integration nach y sofort $\psi(y) = \int \left(N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}\right) dy$ durch dessen Substitution im obigen Ausdrucke $u = \int M dx + \psi(y)$ das Resultat

$$u = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}\right) dy \quad . \; . \; . \quad 79)$$

erhalten wird. — Wäre man anstatt von $\frac{\partial u}{\partial x}$ von $\frac{\partial u}{\partial y}$ ausgegangen, so hätte man durch ganz analoge Schlussfolgerungen

$$u = \int N dy + \int \left(M - \frac{\partial \int N dy}{\partial x}\right) dx \quad . \; . \; . \quad 80)$$

erhalten. Wäre endlich $M dx + N dy = 0$, also $du = 0$ gegeben gewesen, so wäre

$$\left.\begin{aligned} &\int M dx + \int \left(N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}\right) dy = \text{Const.} \\ \text{oder} \quad &\int N dy + \int \left(M - \frac{\partial \int N dy}{\partial x}\right) dx = \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 81)$$

zu setzen. Es könnte den Anschein haben, als wenn $\int \frac{\partial \int M dx}{\partial y} dy$ mit $\int M dx$ einerlei wäre; dies ist aber aus dem Grunde nicht der Fall, weil bei der Differentiation des $\int M dx$ nach y constante und solche Glieder, die Funktionen von x allein sind, fortfallen. In der That ist ja $\int \frac{\partial \int M dx}{\partial y} dy$ eigentlich $= \int M dx + \psi(x)$, wobei $\psi(x)$ eine die Integrationsconstante vertretende Funktion von x (die auch Constante in sich begreifen kann) vorstellt, und bei der Differentiation nach y wegfällt. Wäre z. B. $(ax + by + c) dx + (bx + ey + f) dy = 0$ gegeben, so hätte man $M = ax + by + c$; $N = bx + ey + f$, $\frac{\partial M}{\partial y} = b$; $\frac{\partial N}{\partial x} = b$; $\int M dx = \frac{ax^2}{2} + byx + cx$; $\frac{\partial \int M dx}{\partial y} = bx$, somit

$\int \frac{\partial \int M dx}{\partial y} dy = \int b x dy = bxy$, was sich von $\int M dx$ durch den Abgang der bei der Differentiation nach y fortgefallenen Glieder $\frac{ax^2}{2}$ und cx unterscheidet. Dagegen kann man statt $\frac{\partial \int M dx}{\partial y}$ allerdings $\int \frac{\partial M}{\partial y} dx = \int b dx$ setzen, was, wie oben, bx gibt; man kann demnach statt $\int \frac{\partial \int M dx}{\partial y} dy$ auch schreiben

$\int\int \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$ (oder wegen $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ auch $\int\int \frac{\partial N}{\partial x} dx dy$)

und erhält dafür im vorliegenden Beispiele $\int\int b dx dy = bxy$, wie zuvor. Um dieses Beispiel völlig zu berechnen, fehlt von den Grössen

$$\int M dx + \int N dy - \int\int \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \text{Const.} \quad . \quad . \quad 82)$$

noch $\int N dy = bxy + \frac{ey^2}{2} + fy$. Die der Formel 82 entsprechenden Integralwerthe geben zusammen

$$\frac{ax^2}{2} + byx + cx + bxy + \frac{ey^2}{2} + fy - bxy = \frac{ax^2}{2} + byx + cx + \frac{ey^2}{2}$$
$$+ fy = \text{Const.}$$

Das besprochene Integrationsverfahren setzt voraus, dass $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ sei, wesshalb diese bei einem vollständigen Differentiale einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen zutreffende Relation auch die Bedingung der Integrabilität heisst.

(**Integrirender Factor.**) Es ist einleuchtend, dass diese Bedingung der Integrabilität durch gewisse Transformationen der ursprünglichen Differentialgleichung $M dx + N dy = 0$ verloren gehen kann. Wäre z. B. $M = m F(x,y)$ und $N = n F(x,y)$, so würde die Division durch den gemeinschaftlichen Faktor $F(x,y)$ zur abgekürzten Gleichung $m dx + n dy = 0$ führen*), welcher die Bedingung der Integrabilität im Allgemeinen nicht mehr zukommen wird. Handelt es sich nun um eine so entstandene oder überhaupt um eine der Bedingung der Integrabilität $\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$ nicht entsprechende Gleichung, so entsteht

*) Wobei im Allgemeinen sowohl m als auch n Funktionen von x und y sein können.

die Frage nach einer noch unbekannten Funktion $F(x, y)$ (oder vielleicht $F(x)$ oder $F(y)$) durch deren Einführung als gemeinschaftlicher Faktor in die vorliegende Differentialgleichung die Bedingung der Integrabilität hergestellt würde. Man nennt eine solche Funktion eine integrirende oder einen integrirenden Faktor. Soll z. B. μ ein integrirender Faktor sein, so muss

$$\frac{\partial(m\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(n\mu)}{\partial x} \text{ also } \frac{\partial m}{\partial y}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial y} m = \frac{\partial n}{\partial x}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x} n$$

oder $$\mu\left(\frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x}\right) = n\frac{\partial \mu}{\partial x} - m\frac{\partial \mu}{\partial y} \text{ sein.}$$

Die Aufstellung der zweiten Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie wird uns ein Beispiel dieser Art darbieten. Man ist übrigens selten in dem Falle, von der soeben aufgestellten Relation zur Auffindung des integrirenden Faktors Gebrauch machen zu können. In der Regel kommen bei der Auflösung der Differentialgleichungen andere Kunstgriffe in Anwendung, auf deren Erläuterung jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll.

(**Einige Lehrsätze der analytischen Geometrie. — Distanz zweier Punkte. — Richtungswinkel.**) Wenn Ox, Oy und Oz (Fig. 15) die Durchschnitte von den drei aufeinander senkrechten sogenannten Coordinaten-Ebenen sind, nämlich die gleichfalls auf einander senkrechten sogenannten Coordinaten-Axen, beziehungsweise x-Axe, y-Axe und z-Axe genannt, so wird die Lage eines beliebigen Punktes M im Raum durch seine Abstände $MM_1 = x$, $MM_2 = y$ und $MM_3 = z$ von den Ebenen yOz, xOz und xOy, oder, wie man sich kürzer ausdrückt, von den Ebenen yz, xz und xy bestimmt. Diese Abstände, welche beziehungsweise den drei Axen Ox, Oy und Oz parallel sind, nennt man die (rechtwinkeligen oder orthogonalen) Coordinaten x, y, z des Punktes M und die Coordi-

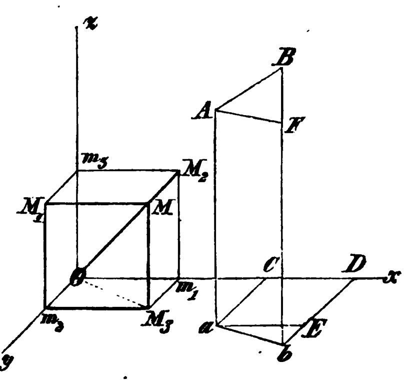


Fig. 15.

naten-Ebenen mit ihren Durchschnittslinien (Axen) nennt man, insofern sie in der bezeichneten Weise zur Orientirung über die Lage gegebener Punkte im Raume dienen, ein (rechtwinkeliges oder orthogonales) Coordinaten-System. Legt man durch den Punkt M drei Ebenen parallel zu den Coordinaten-Ebenen, so schneiden sich diese gleichfalls aufeinander senkrechten Ebenen in den Geraden MM_1, MM_2 und MM_3, welche offenbar auch den Segmenten Om_1, Om_2 und Om_3 gleich sind, die durch die drei letztgenannten Ebenen von den drei Coordinaten-Axen abgeschnitten werden. Diese Segmente sind offenbar die Projektionen der Verbindungslinie $OM = \varrho$ auf die drei Coordinaten-Axen, der Verbindungslinie nämlich des gegebenen Punktes M mit dem Durchschnittspunkte O der drei Axen, welchen Durchschnittspunkt man den Ursprung des Coordinatensystems nennt. ϱ ist demnach die Diagonale eines von den Kanten x, y und z gebildeten rechtwinkeligen Parallelopipedes. Man sieht sofort, dass $\overline{OM}^2 = \overline{MM_3}^2 + \overline{OM_3}^2$ und $\overline{OM_3}^2 = \overline{Om_1}^2 + \overline{M_3m_1}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{MM_2}^2$, somit $\overline{OM}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{MM_2}^2 + \overline{MM_3}^2$ oder

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 83)$$

Die Strecke $OM = \varrho$ schliesst mit den Coordinaten-Axen gewisse Winkel ein, nämlich $MOx = \alpha$, $MOy = \beta$ und $MOz = \gamma$ und aus den rechtwinkeligen Dreiecken MOm_1, MOm_2 MOm_3, welchen diese Winkel angehören, erhellet ohne Weiteres, dass

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \cos \alpha \\ y &= \varrho \cos \beta \\ z &= \varrho \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\varrho} \\ \cos \beta &= \frac{y}{\varrho} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\varrho} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85)$$

Man nennt diese drei Cosinus die Richtungscosinus der betrachteten Strecke ϱ.

Substituirt man in 83 für x, y, z die Werthe aus 84, so erhält man nach erfolgter Kürzung durch ϱ^2 die Relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Richtungscosinus ist immer gleich der Einheit.

Sind zwei Punkte A und B im Raume durch ihre Coordinaten $OC = x_1$, $Ca = y_1$ und $Aa = z_1$, ferner $OD = x_2$, $Db = y_2$ und $Bb = z_2$ gegeben, so findet man deren Distanz $AB = r$ auf folgende Weise. Zieht man in der Figur aE parallel der Abscissenaxe und AF parallel der Verbindungslinie ab der Fusspunkte von z_1 und z_2, so entstehen dadurch zwei beziehungsweise bei E und F rechtwinklige Dreiecke und man findet mittelst derselben sofort $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2$ und wegen $\overline{AF}^2 = \overline{ab}^2 = \overline{aE}^2 + \overline{bE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{bE}^2$ auch $\overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{bE}^2 + \overline{BF}^2$, wobei offenbar $CD = x_2 - x_1$ und ebenso $bE = y_2 - y_1$ und $BF = z_2 - z_1$ ist. Es ist demnach

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad . \quad . \quad 87)$$

welche Formel für $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, das heisst wenn der eine Punkt mit dem Ursprunge O zusammenfällt, in $r^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ übergeht, übereinstimmend mit Formel 83. Die Differenzen $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ und $z_2 - z_1$ sind die Axen-Segmente, welche man erhält, wenn man durch die Punkte A und B zwei Ebenen senkrecht zu Ox, dann zwei senkrecht zu Oy und ebenso zwei senkrecht zu Oz legt; die Differenzen $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ und $z_2 - z_1$ sind also die Projektionen der Strecke $AB = r$ auf die drei Axen, folglich, analog den Gleichungen 84 und 85

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r \cos \alpha \\ y_2 - y_1 &= r \cos \beta \\ z_2 - z_1 &= r \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_2 - x_1}{r} \\ \cos \beta &= \frac{y_2 - y_1}{r} \\ \cos \gamma &= \frac{z_2 - z_1}{r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

wobei man die Richtungswinkel der Strecke $AB = r$, das heisst die Winkel, unter welchen sie gegen die drei Axen geneigt ist, entweder dadurch erhält, dass man im Punkte A drei den Coordinaten-Axen parallele Gerade construirt, mit

welchen dann AB offenbar eben jene Winkel α, β und γ bildet, oder, indem man im Ursprunge O eine zu AB parallele Gerade OM zieht, die dann mit den Axen dieselben Winkel α, β und γ einschliesst, unter welchen AB gegen die Axen geneigt ist.

(**Winkel zweier Geraden im Raume.**) Es seien zwei Gerade im Raume gegeben, die eine mit den Richtungswinkeln α_1, β_1 und γ_1, die andere mit den Richtungswinkeln α_2, β_2 und γ_2 und man soll den Winkel φ berechnen, unter welchem die beiden Geraden gegen einander geneigt sind. Zu dem Ende denke man sich zu jeder der gegebenen Geraden eine Parallele aus dem Ursprunge gezogen und zwar von der Länge 1, also z. B. $OM_1 = 1$ zur ersten und $OM_2 = 1$ zur zweiten im Raume gegebenen Geraden parallel.*) Nun werden OM_1 und OM_2 miteinander offenbar auch den gesuchten Winkel φ bilden, so dass man aus dem Dreiecke OM_1M_2 erhält $= \overline{M_1M_2}^2 = \overline{OM_1}^2 + \overline{OM_2}^2 - 2\,OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos\varphi = 2 - 2\cos\varphi$. Sind ferner x_1, y_1 und z_1 die Coordinaten des Punktes M_1 und x_2, y_2 und z_2 jene des Punktes M_2, so ist nach (87) $\overline{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2\,(x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1)$. Vergleicht man beide Werthe für $\overline{M_1M_2}^2$ und beachtet, dass $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \overline{OM_2}^2 = 1$ und ebenso $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{OM_1}^2 = 1$, so erhält man $2 - 2 \cdot \cos\varphi = 2 - 2\,(x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1)$, folglich $\cos\varphi = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$. Da nun OM_1 und OM_2 mit den Axen dieselben Winkel bilden, unter welchen die im Raume gegebenen Geraden gegen die Axen geneigt sind, so ist nach (84) wegen $OM_2 = 1$, $x_2 = \cos\alpha_2$, $y_2 = \cos\beta_2$, $z_2 = \cos\gamma_2$ und ebenso wegen $OM_1 = 1$, $x_1 = \cos\alpha_1$, $y_1 = \cos\beta_1$, $z_1 = \cos\gamma_1$, wodurch man erhält

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad . \quad 90)$$

(**Kräften - Parallelopiped.**) Man kann sich Intensität und Richtung einer Kraft R, welche einen gegebenen Punkt A (Fig. 16) zum Angriffspunkt hat, immerhin durch eine Strecke AB von entsprechender Länge und Lage vorstellen. Die Projektionen derselben auf die den Coordinaten-Axen parallelen

---

*) Eine erläuternde Figur kann man sich, wenn nöthig, leicht selbst construiren.

Geraden Ax, Ay und Az stellen dann offenbar die in diesen Richtungen wirkenden Kraftcomponenten

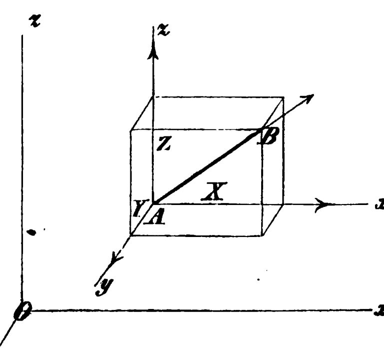


Fig. 16.

$$\left.\begin{array}{l} X = R \cos \alpha \\ Y = R \cos \beta \\ Z = R \cos \gamma \end{array}\right\} \quad . \quad 91)$$

vor, wobei $\cos \alpha$, $\cos \beta$ und $\cos \gamma$ die Richtungscosinus der gegebenen Kraft $R = AB$ sind und unmittelbar einleuchtet, dass

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad . \quad 92)$$

sein muss.

Wären mehrere Kräfte R, R', $R'' \cdots\cdots$ mit den Componenten X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', $Z'' \cdots\cdots$ im Punkte A angreifend, so wäre deren Resultirende K offenbar durch den Ausdruck

$$K^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 93)$$

gegeben.

Soll der Angriffspunkt keinen Antrieb erfahren, so muss $K = 0$ sein, folglich

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma Z = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94)$$

das heisst die algebraische Summe der Kraftcomponenten muss für jede der drei Axen Null sein.

(**Gleichung einer Fläche.**) Wir denken uns eine Ebene durch den Punkt A (Fig. 17) gelegt, welche auf der Strecke $OA = p$ senkrecht steht und betrachten einen beliebigen Punkt M dieser Ebene, dessen Coordinaten $OQ = x$, $QP = y$ und $PM = z$ sein mögen. Der Abstand $OM = r$ dieses Punktes vom Ursprunge bildet dann mit dem Perpendikel $OA = p$ und mit der in der betrachteten Ebene liegenden

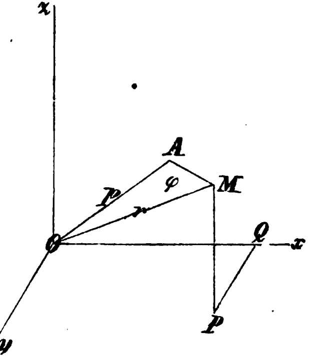


Fig. 17.

Geraden AM ein bei A rechtwinkliges Dreieck, aus welchem $p = r \cos AOM = r \cos \varphi$ sich ergibt. Sind α', β' und γ' die Richtungswinkel von p und α, β und γ jene von r, so folgt weiter (Formel 90)

$p = r (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma')$, also wegen

$$r \cos \alpha = x,\ r \cos \beta = y \text{ und } r \cos \gamma = z \text{ auch}$$

$$\cos \alpha' . x + \cos \beta' . y + \cos \gamma' . z = p \quad . \; . \; . \quad 95)$$

Wir haben in dieser Gleichung eine charakteristische Eigenschaft der Ebene zum Ausdrucke gebracht, nämlich die, dass sie alle diejenigen Punkte M enthält, oder, wie man auch sagt, der geometrische Ort aller jener Punkte M ist, deren Verbindungslinien mit A auf OA senkrecht sind, folglich auch alle Geraden AM, die senkrecht zu OA durch A gezogen sind. Man nennt die erhaltene Gleichung desshalb auch die Gleichung der betrachteten Ebene. Wir könnten sie auch in der Form

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\cos \alpha'}{p} \cdot x + \frac{\cos \beta'}{p} \cdot y + \frac{\cos \gamma'}{p} \cdot z = 1 \\ \text{oder} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 96)$$

schreiben, indem wir $\frac{p}{\cos \alpha'} = a$, $\frac{p}{\cos \beta'} = b$ und $\frac{p}{\cos \gamma'} = c$ setzen, welche Grössen, wie nebenbei erwähnt sein mag, die Strecken bedeuten, welche die bis zum Durchschnitte mit den Coordinaten-Axen erweiterte Ebene, vom Ursprunge aus gerechnet, an den drei Axen abschneidet.

Die Gleichung kann endlich auch auf die Form $\cos \alpha' \cdot x + \cos \beta' \cdot y + \cos \gamma' \cdot z - p = 0$, also allgemein auf die Form

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 97)$$

gebracht werden, woraus wir sehen, dass eine Gleichung vom ersten Grade zwischen den Veränderlichen x, y, z einer Ebene angehört.

Durch die Gleichung

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \quad 98)$$

charakterisiren wir eine Fläche, deren jeder Punkt x, y, z von einem bestimmten festen Punkte a, b, c den Abstand r hat, also eine Kugelfläche vom Radius r, deren Centrum die Coor-

dinaten a, b und c hat. Wir nennen deshalb obige Gleichung 98 die Gleichung einer Kugel; sie geht, wenn das Centrum mit dem Ursprunge zusammenfällt, also $a=0$, $b=0$, $c=0$ wird, in

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots\ldots \quad 99)$$

über. Es lässt sich ferner zeigen, dass z. B. die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad 100)$$

einer ellipsoidischen Fläche angehört, die den Ursprung zum Mittelpunkte hat und die Halbaxen a, b und c besitzt. Ueberhaupt bedeutet eine Gleichung vom zweiten Grade zwischen x, y und z eine sogenannte Fläche zweiter Ordnung. Eine solche wird von einer Geraden im Allgemeinen in zwei Punkten und von einer Ebene in einer Kegelschnittslinie geschnitten.

Allgemein können wir sagen, dass eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten, wie z. B.

$$\left.\begin{array}{ll} & f(x, y, z) = \text{Const.} \\ \text{oder} & F(x, y, z) = 0 \\ \text{oder endlich} & z = \varphi(x, y) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 101)$$

einer Fläche angehört; je zwei der Veränderlichen, z. B. x und y, wie in der letzten Gleichung angenommen ist, können als unabhängig Veränderliche angesehen werden, durch deren Bestimmung sofort auch die dritte z, als abhängig Veränderliche, bestimmt wird.

Denkt man sich eine Fläche $z = f(x, y)$ durch eine zur Ebene der xy parallele Ebene im Abstande $z = c$ von jener geschnitten, so wird für alle Punkte der Durchschnittslinie, welche man eine Niveaulinie nennt, $c = f(x, y)$ also

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = 0 \quad \ldots\ldots \quad 102)$$

sein. Diese Gleichung passt für alle Werthe von c und ist daher die allgemeine Differentialgleichung der Niveaulinien, welche der betrachteten Fläche angehören.

Erstes Hauptstück.

Lehrsätze aus der allgemeinen Mechanik und aus der Mechanik fester Körper.

Da wir die Anfangsgründe der Mechanik, wie sie in den oberen Classen der Mittelschulen allenthalben gelehrt zu werden pflegen, als bekannt voraussetzen, scheint es uns nicht nöthig, hier mit einleitenden Bemerkungen über Gegenstand und Eintheilung der Mechanik zu beginnen. Wir wollen vielmehr sofort auf jene Erörterungen über gewisse Definitionen und Lehrsätze der Mechanik eingehen, welche theils dazu dienen sollen, die aus den Mittelschulen mitgebrachten Vorkenntnisse auf festere wissenschaftliche Grundlagen zu stellen, theils dieselben in dem Masse zu ergänzen und zu erweitern, als es eben der Zweck dieses Buches erheischt.

(**Geschwindigkeit, Beschleunigung.**) Die elementare Definition der Geschwindigkeit als Weg in der Zeiteinheit erweist sich als unzureichend, wenn die Bewegung keine gleichförmige ist. In diesem Falle wird man auf folgende Art zu einem klaren Begriffe der Geschwindigkeit gelangen: Es sei (Fig. 18) uv ein Stück der Bahn eines beweglichen Punktes der zur Zeit t in M sich befinden mag, nachdem er innerhalb der besagten Zeit t die von O aus gemessene Wegstrecke $OM = s$ zurückgelegt hat. Im nächstfolgenden sehr kleinen Zeittheilchen dt (Zeitelement, Zeitdifferentiale) wird der besagte Punkt ein entsprechend kleines Wegstückchen $Mm = ds$ (Wegelement, Differentiale des Weges) zurücklegen, und es ist klar, dass der Quotient $\frac{ds}{dt}$ als Mass der Geschwindigkeit des beweglichen Punktes im betrachteten Augenblicke anzusehen sein wird.

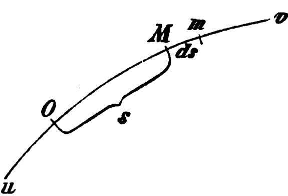


Fig. 18.

Dieser Quotient, welchen man den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nennt, ist nämlich der Grenzwerth, der sich herausstellt, wenn man in dem Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, wobei Δt ein bestimmtes Zeitintervall und Δs den entsprechenden Zuwachs des Weges bedeutet, die Grösse Δt und somit auch Δs in's Unendliche abnehmend sich vorstellt. Bezeichnet man also die Geschwindigkeit im Punkte M mit v, so gelangt man zur Formel:

$$\lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \frac{ds}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Im nächstfolgenden Zeitelemente dt wird das Bewegliche abermals ein entsprechendes Bahnelement zurücklegen, welches vom vorigen ds im Allgemeinen verschieden sein wird und allenfalls ds' heissen mag, insofern nämlich die Geschwindigkeit des Beweglichen sich ändert, indem sie aus dem vorigen Werthe v in einen andern Werth v' übergeht, der wegen der Kürze der betrachteten aufeinanderfolgenden Zeittheilchen dt sehr wenig vom Werthe v abweichen wird und somit etwa durch $v + dv = v'$ vorgestellt werden kann, wobei dv die entsprechende kleine Geschwindigkeitsänderung bedeutet. Da nun offenbar $v' = \frac{ds'}{dt}$ ist, während $v = \frac{ds}{dt}$ war, so ist offenbar $v' - v = dv = \frac{ds' - ds}{dt}$. Vergleicht man diese Geschwindigkeitsänderung mit dem betreffenden Zeitelemente dt, so stellt der Differentialquotient $\frac{dv}{dt}$ eine Grösse vor, welche man **Beschleunigung, Acceleration**, (oder wenn sie negativ ist) **Retardation** zu nennen pflegt. Diese Grösse, welche wir mit g bezeichnen wollen, entspricht natürlich wieder einem bestimmten Augenblicke der betrachteten Bewegung beim Uebergange aus dem Bahnelemente ds in das nächstfolgende ds' und muss auch wieder als ein Grenzwerth angesehen werden, nämlich des Quotienten $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, wobei Δv die einem endlichen Intervalle Δt entsprechende Geschwindigkeitsänderung bedeutet. Denkt man sich nämlich wieder Δt und somit auch Δv in's Unendliche abnehmend, so ergibt sich die Beziehung:

$$\lim. \frac{\Delta v}{\Delta t} = g = \frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Da $dv = \frac{ds' - ds}{dt}$ und somit $\frac{dv}{dt} = g = \frac{ds' - ds}{dt^2}$, wofür man $\frac{d^2 s}{dt^2}$ zu schreiben pflegt, so ergibt sich auch sofort die weitere Relation

$$g = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{. . . . . 3)}$$

Es ist also die Beschleunigung der Grösse gleich, welche man den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit zu nennen pflegt. Gleichförmige Bewegungen sind also solche, bei welchen der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}$ constant und somit der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 s}{dt^2}$, d. i. die Beschleunigung $= 0$ ist. Eine gleichförmige Bewegung setzt also voraus, dass keine (beschleunigende oder verzögernde) Kraft auf das Bewegliche wirkt; ist eine solche vorhanden und hat das Bewegliche die Masse m, so gilt bekanntlich das Produkt mg von Masse und Beschleunigung als Mass der beschleunigenden Kraft (des sogenannten Beschleunigungsdruckes, wobei eine Verzögerung als negative Beschleunigung in Betracht kommt). Nennen wir diese Kraft p, so ist also, wie später (Formel 48) noch näher erläutert werden wird,

$$p = mg = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{. . . . . 4)}$$

während man das Produkt $mv = m \frac{ds}{dt}$ Bewegungsgrösse nennt.

Die Kraft p wird eine constante genannt, wenn $g = \frac{d^2 s}{dt^2}$ einen constanten Werth hat; im entgegengesetzten Falle heisst die Kraft veränderlich. Im ersten Falle gelangt man durch Integration der Gleichung 3) zu den bereits aus den Anfangsgründen bekannten Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Man erhält nämlich zunächst $g dt = \frac{d^2 s}{dt}$ und somit, da dt selbstverständlich als constant anzusehen ist, durch Integration $gt + C = \frac{ds}{dt} = v$, d. i. die bekannte Formel für die Endgeschwindigkeit $v = C + gt$, wobei C die Anfangsgeschwindigkeit vorstellt. Weiterhin erhält man $ds = C dt + g t dt$, somit durch abermalige Integration $s = Ct + \frac{gt^2}{2} + C'$

oder $s = C' + Ct + \frac{g}{2} t^2$, wobei C' dasjenige s vorstellt, welches, vom Ausgangspunkte der Zählung der s an gerechnet, dem Zeitmomente $t = o$ entspricht, in welchem Zeitmomente das Bewegliche auch schon die Geschwindigkeit C besass. — Eine constante Kraft bedingt also, wie bekannt, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Dagegen möge als ein Beispiel der Wirkung der sogenannten veränderlichen Kräfte hier die sogenannte

(**Schwingende Bewegung**) betrachtet werden. Eine solche Bewegung einfachster Art entsteht, wenn ein längs einer Geraden $A A'$ (Fig. 19) beweglicher Punkt B nach einem festen Punkte O dieser Geraden stets mit einer Kraft hingezogen wird, welche dem Abstande (Elongation) $O B = s$ des beweglichen Punktes vom festen Punkte proportional ist. Besitzt das Bewegliche, wie wir zur Vereinfachung der Formeln annehmen wollen, die Masse $m = 1$ (wir können immerhin die Masse des Beweglichen als Masseneinheit gelten lassen) so stellt $-\frac{d^2 s}{d t^2} = ks$ den der Elongation s proportionalen, der Vergrösserung dieser Elongation entgegenwirkenden und daher negativ bezeichneten Beschleunigungsdruck vor, der hier als verzögernde Kraft in Betracht kommt, wenn wir annehmen, dass das Bewegliche vom Punkte O aus zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung gegen A hin mit einer gewissen Geschwindigkeit c angetreten habe.

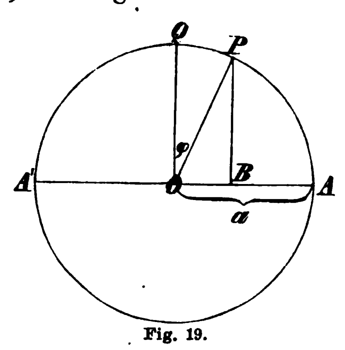


Fig. 19.

Schreibt man vorstehende Gleichung in der Gestalt

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -ks$$

so erhält man durch beiderseitige Multiplikation mit ds die Relation $ds \frac{d^2 s}{d t^2} = -ksds$, die nunmehr nach s, indem man dabei dt als constant betrachtet, integrirt werden soll. Man erhält auf diese Art

$$\frac{1}{dt^2}\int ds d^2 s = -k\int s ds \text{ somit } \frac{d s^2}{d t^2} = -ks^2 + \text{Const.}$$

Hier stellt $\frac{ds}{dt}$ offenbar die Geschwindigkeit des Beweglichen im betrachteten Augenblicke vor, die wir v nennen wollen, so dass wir erhalten

$$v^2 = - ks^2 + \text{Const.}$$

Diese Geschwindigkeit, welche unter den obwaltenden Verhältnissen offenbar kleiner sein muss als die ursprüngliche in O vom Betrage c wird gegen A hin noch weiter abnehmen müssen, bis sie unter dem Einflusse der mit der Elongation zunehmenden Retardation endlich in einem bestimmten Punkte A, den das Bewegliche mit ungleichförmig verzögerter Bewegung erreicht, gleich Null wird. Bezeichnet man mit a diese grösste Elongation OA, die man Amplitude nennt, so bietet sich zur Bestimmung der Integrationsconstanten die Erwägung dar

$$0 = - ka^2 + \text{Const.}$$

d. i. Const. $= ka^2$, und folglich

$$v^2 = k(a^2 - s^2).$$

Diese Gleichung liefert mit Rücksicht auf $v = \frac{ds}{dt}$ den unmittelbar zu integrirenden Differentialausdruck für die Zeit t

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{k(a^2 - s^2)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}}$$

aus welchem sich $t = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}}$, das ist

$$\sqrt{k} \cdot t = \text{arc. sin}\, \frac{s}{a} + \text{Const.}$$

ergibt. — Erwägt man nun, dass für $t = 0$ auch $s = 0$ wird, so folgt Const. $= 0$, also $\sqrt{k} \cdot t = \text{arc. sin}\, \frac{s}{a}$ oder

$$s = a \sin(\sqrt{k} \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Die Differentiation dieser Gleichung führt auf die weitere Beziehung

$$ds = a \cos(\sqrt{k} \cdot t)\, \sqrt{k} \cdot dt, \text{ oder, wegen } \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = a\sqrt{k} \cdot \cos(\sqrt{k} \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

eine Formel, die erkennen lässt, dass die oben mit c bezeichnete, dem Zeitpunkte $t = 0$ entsprechende Geschwindigkeit durch

$$c = a\sqrt{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

vorgestellt wird, wesshalb die Gleichung für v auch in der Gestalt

$$v = c \cos(\sqrt{k} \cdot t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

geschrieben werden kann.

Ist die Geschwindigkeit des Beweglichen im Punkte A Null geworden, so beginnt, wie leicht ersichtlich, eine ungleichförmig beschleunigte rückgängige Bewegung, welche das Bewegliche im Punkte O seine zur Zeit $t = 0$ gehabte Geschwindigkeit $c = a\sqrt{k}$ wieder erlangen lässt, um dieselbe auf dem weiterhin mit ungleichförmig verzögerter Bewegung zurückgelegten Wege $OA' = OA$ in A' wieder zu verlieren und bei der hierauf folgenden ungleichförmig beschleunigten rückgängigen Bewegung beim Durchgange durch O abermals zu gewinnen. Bei vorhandenen Bewegungshindernissen würde das Bewegliche bei steter Abnahme der Schwingungsamplituden schliesslich im Punkte O als Gleichgewichtslage zur Ruhe kommen. Sehen wir von solchen Bewegungshindernissen ab, so lässt sich zeigen, dass von jedem beliebigen Momente an gerechnet nach Ablauf eines bestimmten Zeitintervalles, welches man Schwingungsdauer nennt, das Bewegliche wieder in dieselbe Phase zurückkehrt, das heisst: wieder dieselbe Elongation und Geschwindigkeit besitzt. Die Werthe für s und v werden nämlich nicht geändert, wenn man in den bezüglichen Ausdrücken statt t den Werth $t + \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ einsetzt. Man erhält auf diese Art in der That für s

$$s = a \sin\left[\sqrt{k}\left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right)\right] = a \sin[\sqrt{k} \cdot t + 2\pi] = a \sin(\sqrt{k} \cdot t)$$

wie oben und ebenso für v

$$v = c \cos\left[\sqrt{k}\left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right)\right] = c \cos[\sqrt{k} \cdot t + 2\pi] = c \cos(\sqrt{k} \cdot t)$$

wie zuvor. Es stellt sonach

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

den Betrag der Schwingungsdauer dar.

Beschreibt man über der doppelten Amplitude $A'A = 2a$ einen Kreis und betrachtet denselben als die Bahn eines mit

der Geschwindigkeit $a\sqrt{k}$ gleichförmig bewegten Punktes P, dessen Projektion auf den Durchmesser B sein mag, so erhellet, dass die Projektion der Tangentialgeschwindigkeit $a\sqrt{k}$ auf die Gerade AA' stets durch $a\sqrt{k}\cdot\cos\varphi$ vorgestellt wird, wobei φ dem Winkel QOB einer in O senkrecht errichteten Geraden mit OP entspricht. Da nun der Bogen $a\varphi = QP$ mit der Geschwindigkeit $a\sqrt{k}$ binnen der Zeit t zurückgelegt worden ist, die der schwingende Punkt B gebraucht hat, um von O nach B zu kommen, wesshalb $a\varphi = a\sqrt{k}\cdot t$ oder $\varphi = \sqrt{k}\cdot t$, so ergibt sich für die auf den Durchmesser projicirte Geschwindigkeit des Punktes P der Ausdruck $a\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\cdot t)$, welcher Werth nach Formel 6 mit der gleichzeitigen Geschwindigkeit des Punktes B übereinstimmt. Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung stellt sich daher als eine schwingende und umgekehrt die Projektion einer schwingenden Bewegung auf die Peripherie eines über der doppelten Amplitude beschriebenen Kreises als eine gleichförmige dar. Der Winkel

$$\varphi = \sqrt{k}\cdot t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

heisst Phasenwinkel.

Wir haben im Vorstehenden angenommen, dass der Antrieb des beweglichen Punktes gegen den festen Punkt O hin der Elongation s proportional sei; dies ist aber im Allgemeinen nicht nothwendig; es kann dieser Antrieb irgend eine Funktion von s sein, und es ist daher einleuchtend, dass es schwingende Bewegungen von der verschiedensten Art geben kann. Die hier betrachtete einfachste Form hat deshalb eine besondere Wichtigkeit, weil sie jenen in der Natur vorkommenden schwingenden Bewegungen entspricht, die durch Wirkungen der Elasticität hervorgebracht werden. Die Kraft nämlich, welche zur Verschiebung der Theilchen eines elastischen Körpers erforderlich ist, und somit auch die entsprechende Rückwirkung der Elasticität, ist, wie bekannt, innerhalb gewisser Grenzen der Grösse der bewirkten Verschiebung proportional. Solche Kräfte sind daher geeignet, schwingende Bewegungen der betrachteten Art hervorzubringen; wir finden solche beispielsweise an den tönenden Körpern.

An das Gesagte lässt sich unmittelbar die Betrachtung der

(**Pendelschwingungen**) anschliessen. In den Anfangsgründen der Physik wird gezeigt, dass der materielle Punkt M' (Fig. 20) von der Masse m eines mathematischen Pendels von der Länge l unter der Einwirkung einer Acceleration der Schwere vom Betrage g, unter Voraussetzung einer nahezu mit dem Bogen MM' coincidirenden sehr kleinen Elongation $s = l \,.\, \sin \alpha$ gegen die Gleichgewichtslage hin mit einer Kraft $mg \cdot \sin \alpha = m \cdot \frac{g}{l} \cdot s$ angetrieben wird. In diesem speciellen Falle ist also der Werth des k der allgemeinen Formel $= \frac{g}{l}$, durch dessen Einsetzung in die Formel 9) wir sofort erhalten:

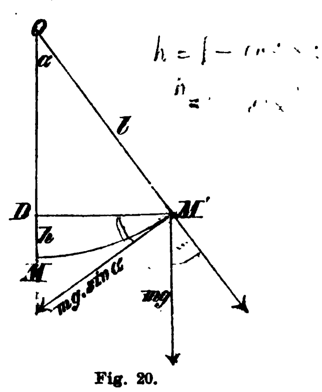


Fig. 20.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Es ist bekannt, dass man beim Pendel die Hälfte dieser Zeit $\left(\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ Schwingungsdauer zu nennen pflegt; dabei ist noch zu bemerken, dass diese Formel für die Schwingungsdauer nur eine Näherungsformel ist, welche für den Fall grösserer Elongationswinkel noch einer Correction bedarf. Für einen Elongationswinkel $\alpha = \text{arc. sin. versus } \frac{h}{l}$ gilt mit Einführung des Werthes $\frac{h}{2l} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ folgende allgemeine Formel für die Schwingungsdauer:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^1 + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \cdots\right] \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Durch Anwendung dieser Formel überzeugt man sich leicht, dass bei einem Elongationswinkel von 10 Graden die Correction $\frac{1}{400}$ und bei einem Elongationswinkel von 5 Graden $\frac{1}{2000}$ von dem nach der Näherungsformel berechneten Werthe in runder Zahl beträgt, dass daher bei Elongationen unter 5⁰ von einer Correction in der Regel abgesehen werden darf. Die

weitere Entwickelung der Pendelgesetze, auf die wir demnächst eingehen wollen, setzt die Kenntniss einiger Lehrsätze voraus, welche wir hier unmittelbar folgen lassen:

(**Coordinaten des Schwerpunktes.**) Wenn man (Fig. 21) die Massen der Moleküle eines Körpers von der Masse M mit $m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots$ bezeichnet und ihre Abstände von einer beliebigen festen Ebene PQ mit $x_1, x_2, x_3 \cdots$ und wenn endlich X den Abstand des Schwerpunktes des besagten Körpers von jener Ebene vorstellt, so gilt der Satz:

$$MX = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + m_3\, x_3 + \cdots\cdots = \Sigma m x \quad . \quad 13)$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sehr einfach unter Voraussetzung eines Systems von nur 2 materiellen Punkten, die sich z. B. in A und B (Fig. 22) befinden und die Massen m_1 und m_2 haben mögen, in den Abständen x_1 und x_2 von der festen Ebene PQ, während der Schwerpunkt (Mittelpunkt der Masse) dieses Systems in C liegen soll, im Abstande X von jener Ebene. Es folgt dann aus dem Begriffe des Mittelpunktes der Masse unmittelbar $AC : BC = m_2 : m_1$ und wenn wir durch C die $ED \| PQ$ ziehen, $AD : BE = m_2 : m_1$ oder $AD \cdot m_1 = BE \cdot m_2$. Da nun $AD = x_1 - X$ und $BE = X - x_2$, so folgt also weiter $(x_1 - X)\, m_1 = (X - x_2)\, m_2$; also $m_1\, x_1 + m_2\, x_2 = X\, (m_1 + m_2)$. Da nun $m_1 + m_2$ im vorliegenden Fall die Gesammtmasse vorstellt, so ist der Satz für ein System von nur 2 materiellen Punkten bewiesen. Mit Rücksicht auf das Verfahren, durch welches man für ein System von mehreren materiellen Punkten zum Mittelpunkte der Masse gelangt, ist es leicht, die allgemeine Giltigkeit dieses Satzes einzusehen, der sich in Bezug auf ein rechtwinkliges dreiaxiges Coordinatensystem (Fig. 23) auch in folgender Weise aussprechen lässt:

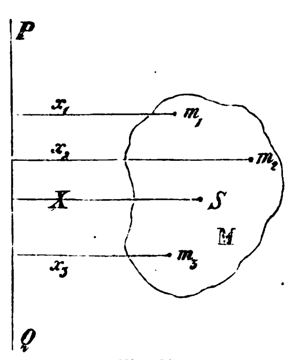


Fig. 21.

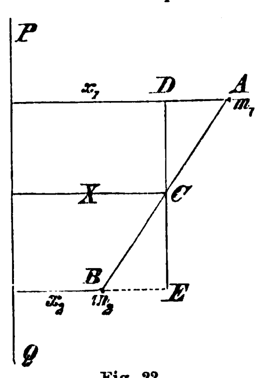


Fig. 22.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m x &= M X,\ X = \frac{\Sigma m x}{M} \\ \Sigma m y &= M Y,\ Y = \frac{\Sigma m y}{M} \\ \Sigma m z &= M Z,\ Z = \frac{\Sigma m z}{M} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Man kann auch die Definition des Schwerpunktes so formuliren, dass man ihn als denjenigen Punkt bezeichnet, dessen Coordinaten den Gleichungen 14) genügen.

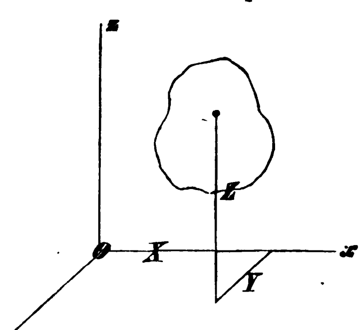


Fig. 23.

(**Trägheitsmoment.**) Wir denken uns einen um die Axe O (Fig. 24) rotirenden Körper und erinnern uns, dass man unter der Winkelgeschwindigkeit ω eines rotirenden Körpers die Geschwindigkeit versteht, welche einem in der Entfernung $OA = 1$ von der Axe befindlichen Punkte A eigen ist. Legt derselbe innerhalb des Zeitelementes dt das Bogenelement $d\alpha$ zurück, so ist also $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit im betrachteten Augenblicke. Die Geschwindigkeit ω' eines andern Punktes A' im Abstande r' von der Axe wird also sein $\omega' = r'\omega = r' \frac{d\alpha}{dt}$. Aendert sich die Winkelgeschwindigkeit innerhalb eines Zeitelementes dt um den Betrag $d\omega$, so stellt uns $\frac{d\omega}{dt}$ die sogenannte Winkelbeschleunigung vor und es wird die gleichzeitige Beschleunigung eines anderen Punktes im Abstande r' von der Axe offenbar $r' \frac{d\omega}{dt}$ sein.

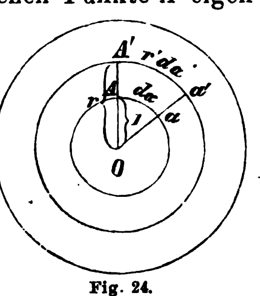


Fig. 24.

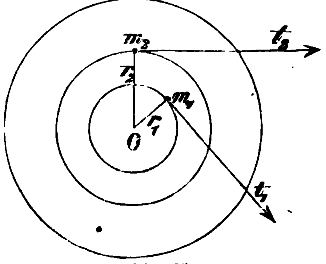


Fig. 25.

Denken wir uns nun (Fig. 25) eine Anzahl von Punkten, welchen die Massen m_1, m_2, m_3 u. s. f. und die

Entfernungen $r_1, r_2, r_3 \cdots\cdots$ zukommen, so werden die entsprechenden Beschleunigungen beziehungsweise $r_1 \frac{d\omega}{dt}, r_2 \frac{d\omega}{dt}$, $r_3 \frac{d\omega}{dt} \cdots\cdots$ sein. Die Produkte derselben mit den betreffenden Massen, nämlich $m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt}, m_2 r_2 \frac{d\omega}{dt}, m_3 r_3 \frac{d\omega}{dt} \cdots\cdots$ stellen also offenbar die Kräfte vor, welche auf die besagten Massentheilchen in der Richtung der Tangenten $t_1, t_2 \cdots\cdots$ wirken müssten, um die besagten Beschleunigungen hervorzubringen. Denken wir uns endlich die Summe der Momente aller dieser Kräfte hinsichtlich der Drehungsaxe bestimmt, nämlich die Produkte der vorstehenden Grössen mit den betreffenden Abständen r von der Axe, so gibt uns diese Summe $m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\omega}{dt} + m_3 r_3^2 \frac{d\omega}{dt} + \cdots\cdots = \frac{d\omega}{dt} \cdot \Sigma m r^2$ den Werth eines Drehungsmomentes PR an, welches dieser Gesammtheit der angeführten Drehungsmomente äquivalent sein würde. Wir können uns nämlich einen Beschleunigungsdruck P wirksam denken, welcher dem Körper die angenommene Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ ertheilt; dies wird eben dann der Fall sein, wenn dieser Beschleunigungsdruck P so angebracht ist, dass der Abstand R seiner Richtung von der Drehungsaxe der Bedingungsgleichung $PR = \frac{d\omega}{dt} \cdot \Sigma m r^2$ entspricht. Die Grösse $\Sigma m r^2$ nennt man (nach Euler) Trägheitsmoment. Bezeichnen wir diese Grösse mit T, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{PR}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

Man spricht diesen Satz kurz so aus: Winkelbeschleunigung $= \frac{\text{Drehungsmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}$.

(**Trägheitsmomente für parallele Axen.**) Lehrsatz: Wenn das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe $= T_0$ ist, so ist das Trägheitsmoment für eine zur Schwerpunktsaxe parallele Axe $T = T_0 + M d^2$, wobei d den Abstand beider Axen und M die Masse des Körpers bedeutet. Es sei in S (Fig. 26) die Schwerpunktsaxe $z z'$, in A eine dazu im Abstand d parallele Axe $\zeta \zeta'$ errichtet und seien in einem auf

beide Axen senkrechten Schnitte xSy $r_1, r_2 \ldots.$ die Abstände der Massentheilchen $m_1, m_2 \ldots.$ von der ersten, $\varrho_1, \varrho_2 \ldots$ die Abstände derselben Massentheilchen von der zweiten Axe. Es ist nun offenbar $T_o = \Sigma m r^2$, $T = \Sigma m \varrho^2$; aus der Figur erhellet aber: $\varrho_1^2 = r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d . \cos S$, wenn wir den Winkel $\widehat{r_1 d}$ mit S bezeichnen. $r_1 \cos S$ ist offenbar $= S B_1 = m_1 C_1 = x_1$; also $\varrho_1^2 = r_1^2 + d^2 - 2 d x_1$. Multipliciren wir diese Gleichung mit m_1 und die analogen Gleichungen für die andern Massentheilchen beziehungsweise mit $m_2, m_3 \ldots.$ und addiren sodann diese sämmtlichen Gleichungen, so erhalten wir:

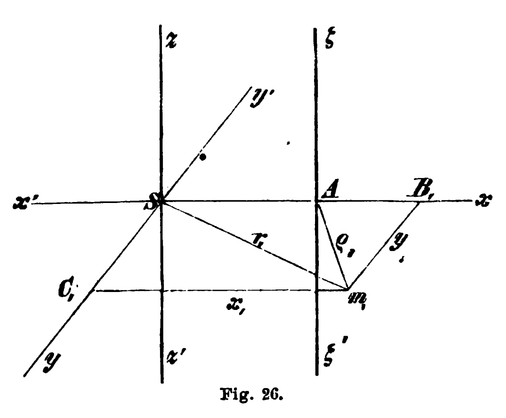


Fig. 26.

$$\Sigma m \varrho^2 = \Sigma m r^2 + \Sigma m d^2 - \Sigma 2 d m x,$$

oder wenn die constanten Grössen d und 2 vor das Summenzeichen gestellt werden:

$$\Sigma m \varrho^2 = \Sigma m r^2 + d^2 \Sigma m - 2 d \Sigma m x, \text{ oder endlich}$$
$$T = T_o + d^2 M - 2 d \Sigma m x.$$

Da aber die x die Abstände von einer durch die Schwerpunktsaxe senkrecht zu SA gelegten Ebene zSy sind, so ist $\Sigma m x =$ der Masse M des Körpers, multiplizirt mit dem Abstande des Schwerpunktes von dieser Ebene, und da dieser Abstand offenbar 0 ist, also selbst $= 0$; wir erhalten demnach:

$$T = T_o + M d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Es ergibt sich hieraus zugleich, dass das Trägheitsmoment für eine Schwerpunktsaxe ein Minimum ist, kleiner nämlich als für alle zur betrachteten Schwerpunktsaxe parallelen Axen. Es ist übrigens einleuchtend, dass es unendlich viele Schwerpunktsaxen gibt und die Trägheitsmomente für dieselben im Allgemeinen verschiedene Werthe haben. Denken wir uns z. B. eine Latte (Fig. 27) und durch den Schwerpunkt S derselben eine Axe zuerst wie bei I, dann wie bei II und endlich wie

bei *III* angedeutet ist, angebracht (wobei die Axe jedesmal einer Kante der rechtwinkelig parallelopipedischen Latte parallel ist), so wird das Trägheitsmoment im ersten Falle den grössten, im dritten Falle den kleinsten und im zweiten Falle einen mittleren Werth haben. Es mag gelegentlich bemerkt werden, dass sich bei der Rotation um die beiden erstgenannten Axen Stabilität zeigt, wovon später noch die Rede sein wird. Man nennt diese aufeinander senkrechten Axen des grössten, kleinsten und mittleren Trägheitsmomentes **Hauptaxen** und wenn man sich auf dieselben von ihrem Durchschnittspunkte aus die reciproken Werthe der Quadratwurzeln der betreffenden Trägheitsmomente aufgetragen denkt, so erhält man die 3 Halbaxen des sogenannten **Central-Ellipsoides**, von welchem später die Rede sein wird.

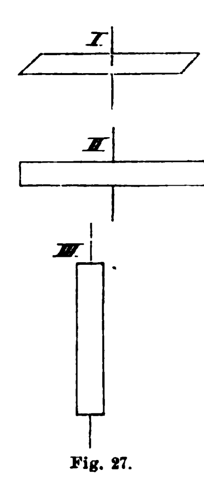


Fig. 27.

Wir wollen beispielsweise das Trägheitsmoment in einigen Fällen berechnen.

Das Trägheitsmoment einer gleichförmig mit Masse besetzten Geraden (oder eines verhältnissmässig sehr dünnen Stabes) findet man auf folgende Weise: Es sei μ die Masse, welche auf die Längeneinheit entfällt, also $\mu\,dx$ die Masse des Elementes dx, welches wir uns (Fig. 28) im Abstande x von der Schwerpunktsaxe zz' denken wollen. Das Trägheitsmoment dieses einen Elementes ist nun offenbar $x^2\mu\,dx = \mu x^2 dx$; um nun das Trägheitsmoment für die beiden Hälften $-\frac{l}{2}$ und $+\frac{l}{2}$ der Geraden von der Länge l zu finden, hat man nur den Werth des Integrals des obigen Differentialausdruckes für die angegebenen Grenzen zu bestimmen; also:

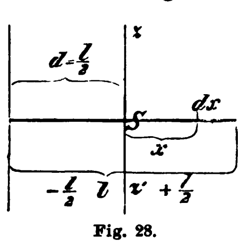


Fig. 28.

$$T_0 = \mu \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \mu \left[\frac{\left(+\frac{l}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{l}{2}\right)^3}{3}\right] = \frac{\mu}{3}\left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right]$$

also $= \frac{\mu}{12} l^3$. Da μl offenbar die Masse M der Geraden darstellt, so können wir auch schreiben:

$$T_o = \frac{M}{12} l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Durch Anwendung der Formel 16) findet man leicht das Trägheitsmoment der Geraden für einen ihrer Endpunkte, durch welchen man sich eine zur Schwerpunktsaxe parallele Axe geführt denken kann, indem man nur $d = \frac{l}{2}$ zu setzen hat; man erhält dann die Formel:

$$T = \frac{M}{3} l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

also ein 4 mal grösseres Trägheitsmoment.

Um das Trägheitsmoment eines gleichförmig mit Masse besetzten Rechteckes (oder eines rechtwinkligen Parallelopipedes, welches man sich aus solchen Schichten zusammengesetzt denken kann) zu berechnen, denken wir uns zuvörderst das Rechteck in Streifen von der unendlich kleinen Breite dy (Fig. 29) zerlegt, von welchen ein beliebiger im Abstande y von der Schwerpunktsaxe S sein mag. Nennen wir die Masse der Flächeneinheit μ, also die Masse des betrachteten Streifens $\mu a dy$, wobei a die Länge des Rechteckes und somit auch des betrachteten Streifens ist, so ist das Trägheitsmoment des letztern, den wir als eine materielle Gerade betrachten können, für seinen Schwerpunkt S' nach dem Vorhergehenden $= \frac{\mu a dy}{12} a^2$, also auf den Schwerpunkt S bezogen, nach Formel 16) $\frac{\mu a dy}{12} a^2 + \mu a dy \cdot y^2$, welchen Differentialausdruck wir jetzt für die ganze Breite des Rechteckes, b, also innerhalb der Grenzen $+\frac{b}{2}$ und $-\frac{b}{2}$ zu integriren haben, um das Trägheitsmoment des ganzen Rechteckes zu finden. Wir erhalten also:

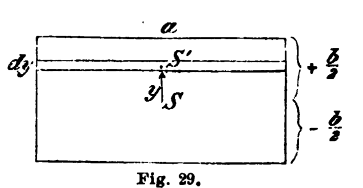


Fig. 29.

$$T_o = \frac{\mu a^3}{12} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy + \mu a \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{\mu a^3}{12} b + \mu \frac{a b^3}{12} = \frac{\mu a b}{12} (a^2 + b^2); \text{ da}$$

$\mu a b$ wieder die Gesammtmasse bedeutet, so erhält man

$$T_o = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \quad \ldots \ldots \quad 19)$$

Ganz dieselbe Formel gilt für ein rechtwinkliges Parallelopiped, wenn man sich unter M die Gesammtmasse desselben denkt, während a und b die Länge und Breite bedeuten und die Schwerpunktsaxe mit der dritten Kante parallel läuft.

Um endlich das Trägheitsmoment für eine gleichförmig mit Masse besetzte kreisförmige Fläche (oder für einen Cylinder, den man sich in solche Schichten zerlegt denken kann) zu finden, wobei wir eine auf der Kreisfläche in deren Mittelpunkt senkrechte Axe voraussetzen, denken wir uns dieselbe in lauter Ringe von unendlich kleiner Breite dx zerlegt (Fig. 30), von welchen ein beliebiger den inneren Radius x haben mag, und somit die Masse $\mu 2\pi x dx$, also das Trägheitsmoment $\mu 2\pi x dx x^2 = 2\pi\mu x^3 dx$, welcher Differentialausdruck, von 0 bis zum Werthe des Radius r der Kreisscheibe integrirt, das gesuchte Trägheitsmoment $2\pi\mu\int_0^r x^3 dx = 2\pi\mu \frac{r^4}{4}$ gibt. Da $\mu\pi r^2 = M$ ist, so erhält man hieraus

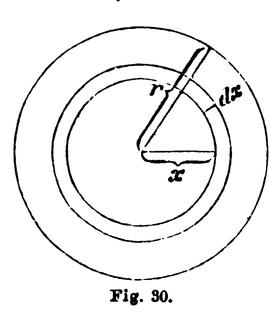


Fig. 30.

$$T_o = \frac{M}{2} r^2 \quad \ldots \ldots \quad 20)$$

welche Formel auch für einen geraden Cylinder von der Masse M gilt. Durch ähnliche Betrachtungen fände man z. B. auch das Trägheitsmoment einer Kugel

$$T_o = \tfrac{2}{5} M r^2 \quad \ldots \ldots \quad 21)$$

u. s. w.

Denkt man sich anstatt der Masse M eines Körpers eine Masse, gleich dem Trägheitsmomente T dieses Körpers im Abstande 1 von der Drehungsaxe angeordnet, so erhält man einen Körper von gleichem Trägheitsmomente. Rotirt derselbe mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so ist dann offenbar:

$$T\frac{\omega^2}{2} = L \quad \ldots \ldots \quad 22)$$

die dem betrachteten Körper innewohnende lebendige Kraft, oder

$$\frac{T\omega^2}{2g} = L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

wenn man den Arbeitswerth der lebendigen Kraft in Kilogrammmetern (nämlich auf Gewichtseinheiten bezogen) ausdrückt. Der Abstand ϱ von der Axe, in welchem die Gesammtmasse des Körpers, M angebracht werden müsste, um das nämliche Trägheitsmoment $T = M\varrho^2$ zu äussern, heisst Schwungradius.

(**Physisches Pendel; reducirte Länge.**) Eine Formel für die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ergibt sich aus folgender Betrachtung. Man denke sich ein solches Pendel von der Masse M um einen Elongationswinkel α aus der Gleichgewichtslage gebracht; es wird dann die Schwerkraft, welche nunmehr im Schwerpunkte S' (Fig. 31) ihren Angriffspunkt hat, mit der Intensität Mg und mit dem Drehungsmomente Mgp auf das Pendel einwirken. Dieser Einwirkung verdankt das Pendel eine gewisse Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$

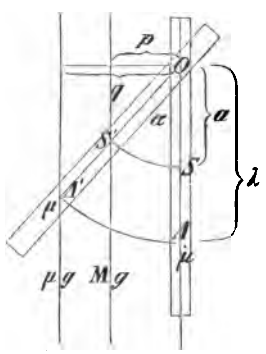


Fig. 31.

gegen seine frühere Gleichgewichtslage hin und man erhält daher nach Formel 15 die Gleichung $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mgp}{T}$, wenn T das Trägheitsmoment des Pendels hinsichtlich der Drehungsaxe O vorstellt. Unter den unendlich vielen mathematischen Pendeln, aus welchen man sich das gegebene physische Pendel zusammengesetzt denken kann, wollen wir ein bestimmtes, welchem der in A, beziehungsweise A' befindliche materielle Punkt μ angehört, einer speciellen Betrachtung unterwerfen. Wir denken uns dieses einfache Pendel so gewählt, dass seine Länge λ nach der Formel $t = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ eine Schwingungsdauer mit sich bringt, welche gerade gleich ist der Schwingungsdauer des gegebenen physischen Pendels. Soll diess der Fall sein, so muss das mathematische Pendel $O\mu$, wenn es für sich allein vorhanden wäre, aus seiner gegenwärtigen Elongation mit derselben Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ die rückgängige Bewegung gegen die Gleich-

gewichtslage antreten wie das betrachtete physische Pendel; es muss also, weil $\mu g q$ offenbar das auf das mathematische Pendel einwirkende Drehungsmoment vorstellt und $\mu \lambda^2$ das Trägheitsmoment dieses Pendels ist, die Gleichung bestehen

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mgp}{T} = \frac{\mu g q}{\mu \lambda^2} \text{ also } \frac{Mp}{T} = \frac{q}{\lambda^2}, \text{ somit } \lambda^2 = \frac{q}{p} \cdot \frac{T}{M};$$

aus der Figur ersieht man, dass $p : q = a : \lambda$ also $\frac{q}{p} = \frac{\lambda}{a}$, wobei a den Abstand des Schwerpunktes S von der Axe O bezeichnet. Man erhält daher $\lambda^2 = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{T}{M}$, folglich

$$\lambda = \frac{T}{Ma} \quad \text{. . . . . 24)}$$

Die so gefundene Länge eines mathematischen Pendels, welches mit einem gegebenen physischen Pendel gleiche Schwingungsdauer hat, heisst die reducirte Länge des letzteren. Wir finden mittelst derselben die Schwingungsdauer des physischen Pendels, gegeben durch die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} = \pi \sqrt{\frac{T}{Mag}} \quad \text{. . . . . . 25)}$$

Aus dieser Formel ergibt sich unmittelbar

$$g = \frac{\pi^2 \lambda}{t^2} \quad \text{. . . . . 26)}$$

Denken wir uns also ein physisches Pendel von bestimmter Schwingungsdauer, z. B. ein Sekundenpendel, für welches $t = 1$ ist, in welchem Falle wir die reducirte Länge mit λ_1 bezeichnen wollen, so erhalten wir:

$$g = \pi^2 \lambda_1 \quad \text{. . . . . 27)}$$

Es ist also die Acceleration der Schwere proportional der Länge des einfachen Sekundenpendels. Diese letztere ändert sich also mit der geographischen Breite nach demselben Gesetze wie die erstere. Da nun, wie später gezeigt werden wird

$$g_\varphi = g_o (1 + 0{,}0052 \sin^2 \varphi) \quad \text{. . . . . 28)}$$

wobei g_φ die Acceleration für die Breite φ, g_o für den Aequator vorstellt, so gilt in gleicher Weise die Formel:

$$\lambda_\varphi = \lambda_o (1 + 0{,}0052 \sin^2 \varphi) \quad \text{. . . . . 29)}$$

wobei λ_φ und λ_0 die correspondirenden Längen des Sekundenpendels sind.

Durch Zählung der Schwingungen während eines längeren Zeitraumes lässt sich die Dauer einer Schwingung leicht mit grosser Genauigkeit ermitteln.

(**Reversionspendel.**) Denken wir uns bei dem betrachteten physischen Pendel (Fig. 31) durch den Punkt A eine Parallele zur Axe O gezogen, welche also um die reducirte Länge λ von dieser Axe absteht, so wird offenbar jeder in dieser Parallelen gelegene materielle Punkt des physischen Pendels sich ebenso verhalten, wie es bezüglich des Punktes μ dargethan worden ist. Von diesen Punkten führt einer den Namen Schwingungsmittelpunkt, derjenige nämlich, welcher in der durch den Schwerpunkt gelegten auf der horizontalen Drehungsaxe senkrechten Ebene liegt. Denken wir uns nun die vorhin erwähnte zur Drehungsaxe parallele Gerade, welche also durch den Schwingungsmittelpunkt hindurchgeht, zur Drehungsaxe gemacht, so wird das in dieser Weise umgekehrte Pendel, wie sich leicht zeigen lässt, dieselbe Schwingungsdauer haben wie vorhin. Denkt man sich das Pendel im Punkte A aufgehängt, so wird dann der Abstand des Schwerpunktes von der neuen Drehungsaxe $a' = \lambda - a$ sein. Nehmen wir an, die reducirte Länge, welche dem Pendel bezüglich der neuen Drehungsaxe zukommt, heisse λ' und T' das betreffende Trägheitsmoment, so ergeben sich folgende Beziehungen. Für die frühere Axe O war $\lambda = \frac{T}{Ma}$, für die neue Axe A wird $\lambda' = \frac{T'}{Ma'}$ sein müssen, also $T = \lambda Ma$ und $T' = \lambda' Ma'$. Führen wir nun das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe ein, so erhalten wir nach Formel 16

$$\begin{array}{c} \lambda Ma = T = T_0 + Ma^2 \\ \lambda' Ma' = T' = T_0 + Ma'^2 \\ \hline M(\lambda a - \lambda' a') = M(a^2 - a'^2) \end{array}$$

woraus folgt: $\lambda a - \lambda' a' = (a + a')(a - a')$; da nun, wie gesagt $a' = \lambda - a$, also $a + a' = \lambda$, so folgt weiter $\lambda a - \lambda' a' = \lambda a - \lambda a'$, also $\lambda' = \lambda$; es entspricht also dem Pendel bezüglich der neuen durch den Schwingungsmittelpunkt gelegten Axe dieselbe reducirte Länge und somit auch dieselbe Schwingungsdauer wie bezüglich der ursprünglichen Axe. Man nennt

solche Axen, welchen die gleiche Schwingungsdauer entspricht, reciproke Axen (wobei nicht zu übersehen, dass die Werthe a und a' als verschieden vorausgesetzt werden) und nennt ein Pendel, welches zu Schwingungsversuchen um zwei reciproke Axen eingerichtet ist, ein Reversionspendel. Denkt man sich eine mit zwei festen im Abstande λ parallelen Axen versehene Pendelstange mit an derselben passend angebrachten verschiebbaren Laufgewichten; so kann man es durch entsprechende Anordnung der Laufgewichte dahin bringen, dass für einen bestimmten Beobachtungsort für beide Axen dieselbe Schwingungsdauer t herauskommt, welche dann offenbar $= \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ sein muss. Man gelangt auf diese Art durch Beobachtungen mit dem Reversionspendel zur Kenntniss des Werthes von $g = \frac{\pi^2 \lambda}{t^2}$. Eine andere Einrichtung des Reversionspendels wäre die mit verstellbaren Axen, also mit veränderlichem Axenabstand; man hätte mit einem solchen Reversionspendel, um die Acceleration der Schwere für einen bestimmten Ort ausfindig zu machen, daselbst solange zu experimentiren, bis man jenen Axenabstand λ getroffen hat, bei welchem wieder die gleiche Schwingungsdauer t für beide Axen sich ergibt; man findet dann die Acceleration der Schwere mit derselben Formel (26) wie vorhin. In der That geben solche Pendelversuche das empfindlichste Prüfungsmittel für die Verschiedenheiten der Acceleration der Schwere auf der Erdoberfläche an die Hand.

(**Krummlinige Bewegung; Fliehkraft.**) Da bei einer krummlinigen Bewegung AB (Fig. 32) eine stete Richtungsänderung stattfindet, so muss man bei einer solchen Bewegung den Begriff der Geschwindigkeitsänderung so definiren, dass er auch zugleich die Richtungsänderung in sich schliesst.*) Um dies zu erläutern, ziehen wir (Fig. 33) $OF \| Ax$ der Bewegungsrichtung im Punkte A und stellen durch die Länge dieser Geraden zuzugleich den Betrag der Tangentialgeschwindigkeit v in diesem Punkte dar. Ebenso ziehen wir $OD \| Bx'$, welches

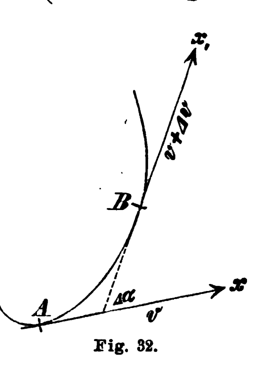


Fig. 32.

*) Vergl. Ritter's analyt. Mechanik.

uns Richtung und Betrag der Tangentialgeschwindigkeit $v + \Delta v$ im Punkte B angibt. Wir müssen uns zu OF offenbar eine Geschwindigkeitscomponente, die durch FD ihrer Grösse und Richtung nach gegeben ist, hinzugefügt denken, um OD als Resultirende zu erhalten, wie das Parallelogramm $OFDG$ andeutet. Zerlegen wir DF in die Componenten FE und ED, deren eine in der ursprünglichen Richtung liegt, die andere dazu senkrecht steht und nehmen wir an, dass Δt die Zeit sei, binnen welcher die betrachtete Geschwindigkeitsänderung sich vollzieht, so erhalten wir für die Beschleunigung in der Bewegungsrichtung Ax (Fig. 32), Tangentialbeschleunigung genannt, den Ausdruck:

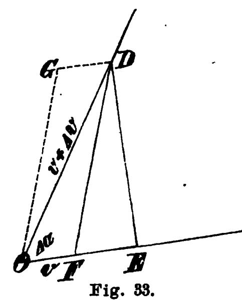


Fig. 33.

$$\lim \frac{FE}{\Delta t} = \lim \frac{OE - OF}{\Delta t} = \lim \frac{(v + \Delta v) \cos \Delta \alpha - v}{\Delta t},$$

wobei $\Delta \alpha$ den Winkel der Bewegungsrichtungen Ax und Ax' vorstellt, den wir uns nun mit Δt ins Unendliche abnehmend denken wollen. Wir erhalten dann für die Tangentialbeschleunigung $\lim \frac{(v + \Delta v) \cos \Delta \alpha - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$; dagegen erhalten wir für die Beschleunigung senkrecht zur Bewegungsrichtung Ax, welche man, insofern sie nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahnstrecke gerichtet ist, auch Centripetalbeschleunigung nennt (nicht zu verwechseln mit Centralkraft bei Centralbewegungen) den Ausdruck

$$\lim \frac{DE}{\Delta t} = \lim \frac{(v + \Delta v) \sin \Delta \alpha}{\Delta t} = v \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in folgender Weise umgestalten. Es sei AB (Fig. 34) das dem $d\alpha$ entsprechende Bahnelement $= \varrho \, d\alpha = ds$, wobei wir uns unter ϱ den Krümmungsradius $OA = OB$ vorstellen. Wir erhalten dann $d\alpha = \frac{ds}{\varrho}$ und somit für die Centripetalbeschleunigung C die Formel $C = \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{ds}{dt}$;

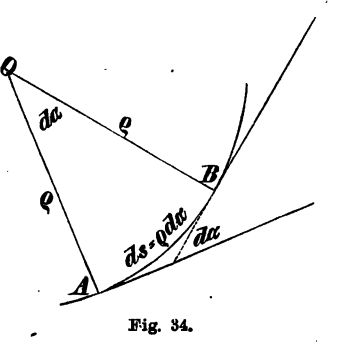


Fig. 34.

also wegen $\frac{ds}{dt} = v$ die Formel

$$C = \frac{v^2}{\varrho} \quad \dots\dots\dots \quad 30)$$

Dieselbe Beschleunigung entspricht der bereits in den Anfangsgründen unter dem Namen Fliehkraft definirten Kraft, nämlich dem normal auswärts gegen die Bahn, also in der Richtung des Krümmungsradius ausgeübten Drucke des Beweglichen. Hat das Bewegliche die Masse m, so erhalten wir demnach für die Fliehkraft die Formel:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{\varrho} \quad \dots$$

oder in Gewichtseinheiten (Kilogr.) ausgedrückt*) . . 31)

$$F = m \cdot \frac{v^2}{\varrho g} \quad \dots$$

welche Formel für eine kreisförmige Bewegung von der Umlaufszeit $t = \frac{2\pi r}{v}$ in die folgende übergeht:

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{t^2} \quad .$$

oder in Gewichtseinheiten ausgedrückt . . . . 32)

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{t^2 g} \quad .$$

wenn r den Kreishalbmesser bedeutet. Bei kreisförmigen Centralbewegungen muss diese Fliehkraft stets der Centralkraft (welche jedoch im Allgemeinen nicht mit der vorhin besprochenen Centripetalbeschleunigung zu verwechseln ist, so wenig wie der Centralpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt) gleich sein. Insofern es also z. B. gestattet wäre, die Bahn des Mondes als eine kreisförmige (sie ist bekanntlich eine elliptische) anzusehen, könnte man nach Formel 32 unmittelbar die Acceleration $\frac{4\pi^2 r}{t^2}$ aus bekannten Daten für die Mondbewegung ableiten, die Acceleration nämlich, mit welcher die Masse des Mondes gegen die Erde hin angetrieben wird. Man hat gefunden, dass diese Acceleration 3616 mal kleiner ist als die Acceleration auf der Erdoberfläche. Da nun die Entfernung des Mondes von der Erde nahezu 60 Erdhalbmesser beträgt,

*) Das heisst auf eine g mal grössere Beschleunigungseinheit bezogen. Vergleiche die Bemerkungen im Paragraphen über $\frac{mv^2}{2}$ und $\frac{mv^2}{2g}$.

so hat man daraus geschlossen, dass die Erdanziehung mit dem Quadrate der Distanz abnimmt (Newton).

(**Verschiedenheit der Schwere auf der Erdoberfläche.**) Es ist bekannt, dass die Acceleration der Schwere auf der Erdoberfläche Verschiedenheiten aufweist, welche sich als eine gesetzmässige Zunahme derselben gegen die Pole hin herausstellen und zwar in der Art, dass die Ueberschüsse der Acceleration in verschiedenen Breiten über jene am Aequator den Quadraten der Sinus der Breiten proportional sind, dass also, wenn g_φ die Acceleration in der Breite φ und g_o jene am Aequator bedeutet, $g_\varphi = g_o(1 + a \sin^2\varphi)$, wobei a eine Constante ist, die wir später näher bestimmen wollen. Die Erklärung dieser Erscheinung lässt sich theils und zwar vorwiegend auf die durch die Erdrotation erzeugte Fliehkraft, die der Schwere der Körper entgegenwirkt, und zum Theil auf die abgeplattete Form des Erdkörpers zurückführen. Um den Einfluss der ersteren Ursache in den Grundzügen anzudeuten, erlauben wir uns vorderhand von der Abplattung abzusehen und den Erdkörper als eine Kugel vom Radius r (Fig. 35) zu betrachten. In einem Punkte A des Aequators würde die Schwerkraft bei ruhender Erde eine gewisse Acceleration G bewirken, welcher jedoch bei rotirender Erde die Acceleration der Fliehkraft $f = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$ (nach der Formel 32) entgegenwirkt. Bezeichnen wir die solchergestalt resultirende Acceleration am Aequator mit g_o, so erhalten wir demnach $g_o = G - f$; dagegen wird an einem Orte B von der Breite φ die Acceleration der Fliehkraft fürs erste an sich kleiner sein, nämlich nur den Werth $f_1 = f \cos\varphi$ betragen, da in der obigen Formel statt des Radius r des Aequators der Radius $r \cos\varphi$ des betreffenden Parallelkreises einzusetzen kommt, und andrerseits wird von dieser kleineren Fliehkraft wieder nur eine Componente vom Betrage $f \cos^2\varphi$, wie aus der Betrachtung der Figur hervorgeht, der

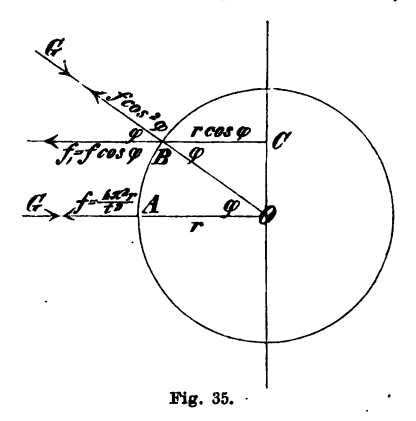


Fig. 35.

Acceleration G der Schwere entgegenwirken. Die resultirende Acceleration wird also an diesem Orte $g_\varphi = G - f\cos^2\varphi$ betragen. Wir erhalten daher offenbar die Differenz $g_\varphi - g_o = f(1 - \cos^2\varphi)$, also $g_\varphi = g_o + f\sin^2\varphi = g_o(1 + \frac{f}{g_o}\sin^2\varphi)$, was der oben erwähnten Relation $g_\varphi = g_o(1 + a\sin^2\varphi)$ entspricht. Durch Substitution der Werthe für die Umlaufszeit t der Erde in Sekunden und den Radius r in Metern findet man $f = 0{,}034$, während man für die Acceleration der Schwere unter dem Aequator $g_o = 9{,}78$ gefunden hat. Es würde demnach $g_\varphi = 9{,}78 + 0{,}034\sin^2\varphi$ die Formel für g_φ sein, wenn die Erde genau kugelförmig wäre; dagegen stimmen die thatsächlichen Beobachtungen mit der Formel:

$$g_\varphi = 9{,}78 + 0{,}051\sin^2\varphi \quad \ldots\ldots \quad 33)$$

was einen Unterschied der Zunahme der Schwere im Betrage von $0{,}017\sin^2\varphi$ herausstellt. Dieser Mehrbetrag kommt auf Rechnung der Abplattung der Erde; wir erhalten demnach die Formel $g_\varphi = 9{,}78(1 + \frac{0{,}051}{9{,}78}\sin^2\varphi)$; also

$$g_\varphi = 9{,}78(1 + 0{,}0052\sin^2\varphi) \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

was mit Rücksicht auf $g_o = 9{,}78$ mit Formel 28 übereinstimmt.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Ergebnisse der Pendelbeobachtungen mit Benutzung des Clairaut'schen Theorems auch dazu dienen können, das Abplattungsverhältniss ε zu bestimmen. Es gilt nämlich folgende Gleichung:

$$\frac{g_{\frac{\pi}{2}} - g_o}{g_o} + \varepsilon = 2{,}5\,\frac{f}{g_o} \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

wobei also $g_{\frac{\pi}{2}}$ die Acceleration der Schwere am Pol $= 9{,}83$ bedeutet; man findet hieraus $\varepsilon = \frac{1}{292} = 0{,}0034$. Hierbei ist noch zu bemerken, dass man unter dem Abplattungsverhältniss ε den Quotienten $\frac{a-b}{a}$, wobei a die grosse und b die kleine Halbaxe des Rotationsellipsoides der Erde verstellt, versteht.

(**Anwendungen des Pendels.**) Die Wichtigkeit des Pendels für die Physik geht zum Theil schon aus dem Gesagten hervor, indem uns dieses Instrument, wie wir gesehen haben, einerseits die genauesten Messungen der Acceleration der Schwere

gestattet und diese Messungen in verschiedenen Breiten wieder dazu dienen können, Zahlenwerthe für die Abplattung der Erde zu gewinnen. Eine andere Anwendung findet das Pendel bekanntlich zum Zwecke der Zeitmessung. Aus Formel 12 ist ersichtlich, dass die Schwingungsdauer eines Pendels für sehr kleine Elongationen vom Betrage dieser Elongationen unabhängig ist, so dass dasselbe Pendel Schwingungen von ungleichen Amplituden in der gleichen Zeit ausführt, insofern nur diese Amplituden überhaupt sehr klein sind. Man nennt dieses merkwürdige Gesetz der Pendelschwingungen das Gesetz des Isochronismus; es wurde bekanntlich von Galilei beobachtet. Diese Eigenthümlichkeit der Pendelschwingungen macht dieselben zu Zeitmessungen sehr geeignet und so dient denn auch das Pendel als der beste Regulator unserer Uhren (Huyghens).

(**Foucault's Pendel.**) So wie die Verschiedenheit der Länge des Sekundenpendels in verschiedenen Breiten, wie wir gesehen haben, zum grössten Theil durch die Erdrotation verursacht wird, so gibt uns die Pendelbewegung auch in anderer Beziehung Beweise für diese Bewegung an die Hand. Man hat schon längst beobachtet, dass frei aufgehängte Pendel nach einer grössern Zahl von Schwingungen mehr oder weniger ihre ursprüngliche Schwingungsrichtung verändern, ohne dass man jedoch diese Erscheinung weiter beachtet oder befriedigende Erklärungen dafür gegeben hätte. Andrerseits führen aber theoretische Erwägungen mit Berücksichtigung des Trägheitsgesetzes zum Ergebnisse, dass in jeder von 0^0 verschiedenen Breite eine relative Bewegung der Schwingungsebene des Pendels bezüglich einer festen Verticalebene, nämlich eine Drehung der Schwingungsebene um die Verticale des Beobachtungsortes stattfinden muss. Zu diesem Resultate gelangte Foucault und bestätigte dasselbe durch seinen berühmten und vielfach auch anderwärts wiederholten Pendelversuch. Die nähere Erklärung dieses Versuches setzt die Kenntniss eines Lehrsatzes voraus, mit welchem wir uns zunächst beschäftigen wollen:

(**Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten.**) Denken wir uns einen Körper gleichzeitig zur Drehung um zwei verschiedene Axen Ox und Oy angeregt, und zwar beziehungsweise mit den Winkelgeschwindigkeiten $OA = \alpha$, $OB = \beta$, wobei wir annehmen wollen, dass die Anregung zur Drehung

um beide Axen in gleichem Sinne, d. h. z. B. von O aus nach x hin gesehen, von links nach rechts und von O aus nach y hin gesehen, auch von links nach rechts stattfinde. Es lässt sich zeigen, dass die unter diesen Bedingungen eintretende Bewegung des Körpers einer Drehung um eine dritte Axe Oz mit einer Winkelgeschwindigkeit $OD = \gamma$ entspricht, die wir finden, indem wir aus $OA = \alpha$ und $OB = \beta$ ein Parallelogramm construiren, dessen Diagonale uns dann Richtung und Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Drehbewegung angibt. Ersteres wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass jeder beliebige in Oz gelegene Punkt E bei der betrachteten Bewegung in Ruhe bleibt. Zu dem Ende ziehen wir von E aus die Perpendikel EG und EF auf beide componirende Axen Ox und Oy. Denken wir uns nun vorerst das Bewegliche der Drehung um Ox allein folgend, so wird bei der angenommenen Drehungsrichtung der Punkt E aus der Zeichnungsebene heraustretend, einen Kreisbogen vom Radius GE beschreiben, welcher mit Rücksicht auf die Winkelgeschwindigkeit α im Zeitelemente dt die Grösse $GE \cdot \alpha \cdot dt$ haben wird. Betrachten wir sodann die Bewegung des Körpers ausschliesslich bezüglich der Axe Oy, so wird derselbe Punkt E vermöge der angenommenen Bewegungsrichtung hinter die Zeichnungsebene zurücktretend einen Kreisbogen vom Radius FE beschreiben, dessen Grösse für dasselbe Zeitelement $FE \cdot \beta \cdot dt$ betragen wird. Da nun vermöge eines bekannten Lehrsatzes für den in der Richtung der Diagonale des Parallelogramms $AOBD$ liegenden Punkt E die Beziehung gilt $\alpha \cdot GE = \beta \cdot EF$, so erhellet, dass $GE \cdot \alpha \cdot dt = FE \cdot \beta \cdot dt$ ist und die beiden auf den Punkt E übertragenen Elementarbewegungen sich aufheben müssen; der Punkt E bleibt also in Ruhe, und dasselbe kann von jedem andern Punkte der Oz gezeigt werden, die sich sonach als resultirende Axe darstellt. Um zweitens zu zeigen, dass die Rotation bezüglich dieser resultirenden Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $OD = \gamma$ stattfindet, ziehe man von einem beliebigen Punkte

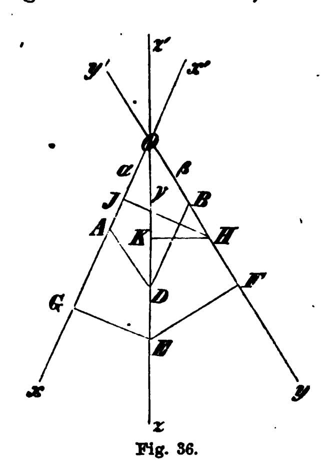


Fig. 36.

H einer der beiden componirenden Axen Perpendikel HJ und HK auf die beiden andern. Betrachten wir nun wieder die Bewegung des Körpers ausschliesslich bezüglich der Axe Ox, so beschreibt der Punkt H im Zeitelemente dt, aus der Zeichnungsebene heraustretend, den Kreisbogen $JH.\alpha \cdot dt$, während die Rotation um die Axe Oy keine Bewegung des Punktes H bewirkt; betrachten wir andrerseits statt der beiden Bewegungen um die Axen Ox und Oy die resultirende Bewegung um die Axe Oz, welche offenbar zu derselben Elementarbewegung des Punktes H führen muss, so erhalten wir für diese Elementarbewegung mit Einführung des noch unbekannten Werthes x der entsprechenden Winkelgeschwindigkeit den Ausdruck $KH \cdot x \cdot dt$, welcher nach dem Gesagten mit $JH \cdot \alpha \cdot dt$ übereinstimmen muss. Es ist also $KH \cdot x = JH \cdot \alpha$. Da nun aber, wie leicht zu zeigen ist*), $KH \cdot \gamma = JH \cdot \alpha$ ist, so muss $x = \gamma$, also in der That die Diagonale OD auch der Grösse nach die resultirende Winkelgeschwindigkeit sein.

Es sei (Fig. 37) nun M der Beobachtungsort, wo ein in C aufgehängtes Pendel seine Schwingungen ab macht, also Cab die Schwingungsebene, deren Projektion $a'b'$ man sich am Beobachtungsorte auf dem Boden in irgend einer Weise markirt denken mag. Bezeichnet man mit ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Erde um ihre Axe NS dreht, so kann man sich diese nach dem vorigen Satze in zwei andere Winkelgeschwindigkeiten zerlegt denken, für welche wir die aufeinander senkrechten Axenrichtungen HR und MM' wählen wollen. Bezüglich der ersteren wird sich eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cos \varphi$ ergeben, welche keine Aenderung in der relativen Lage zwischen der Schwingungsebene Cab und der Marke $a'b'$ bewirken kann; dagegen wird die Rota-

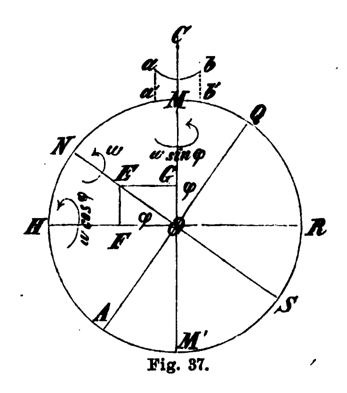


Fig. 37.

*) In Figur 36 ist offenbar $HJ = HO.\sin xOy$ und $HK = HO.\sin zOy$, also $\frac{HJ}{HK} = \frac{\sin xOy}{\sin zOy} = \frac{\sin OAD}{\sin ODA} = \frac{OD}{OA} = \frac{\gamma}{\alpha}$ d. i. $HJ.\alpha = HK.\gamma$.

tionscomponente um die Gerade *MM'*, welche die Verticale des Beobachtungsortes ist, eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene *Cab* in einem der Erdrotation entgegengesetzten Sinne (d. i. nach dem scheinbaren Laufe der Sonne, *O.*, *S.*, *W.*, *N.*) mit sich bringen. Diese relative Bewegung der Schwingungsebene *Cab* gegenüber der Marke *a'b'* wird offenbar mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ stattfinden. Da nun die Drehung der Erde um ihre Axe binnen einer Stunde 15^0 beträgt, so wird die Abweichung der Pendelebene in der Breite φ . . . $15 \sin \varphi$ in Graden per Stunde betragen, was für die Polhöhe von Prag von nahezu 50^0 ungefähr $11\frac{1}{2}^0$ per Stunde ausmacht. Für Orte unter dem Aequator wird die Abweichung der Schwingungsebene natürlich $= 0$ sein; in gleicher Weise würde die Schwingungsebene in unserem Punkte *M* gleich 0 sein, wenn nur die Drehungscomponente um die Axe *HR* vorhanden wäre, von der wir bereits gesagt haben, dass sie keine Abweichung der Schwingungsebene bewirken kann.

(Physikalische Wirkungen der Erdrotation; Abplattung.) Als solche haben wir bereits kennen gelernt: die Verschiedenheit der Schwere auf der Erdoberfläche und die Abweichung der Schwingungsebene eines Pendels. Weiterhin kommen noch in Betracht: die Abplattung der Erde, die östliche Abweichung fallender Körper, die Entstehung der Passatwinde, der Einfluss der Erdrotation auf den Lauf der Flüsse u. s. w. Es mag hier zunächst von der Abplattung die Rede sein. Wir betrachten (Fig. 38) einen Meridian *NMS* der Erde, die wir uns für einen Augenblick als kugelförmig denken, und erwägen, dass die durch die Erdrotation bedingte Fliehkraft in der Richtung *My* mit der Schwerkraft von der ursprünglich durch den Mittelpunkt gehenden Richtung *Mx* eine Resultirende von einer nicht mehr durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Richtung *Mz* gibt. Diese letztere wird also die Richtung der effektiven Schwere auf der rotirenden Erde vorstellen, und es ist sofort einleuchtend, dass eine im Punkte *M* etwa befindliche Wassermasse ein zu *Mz* normales Niveau annehmen muss. Zu dem-

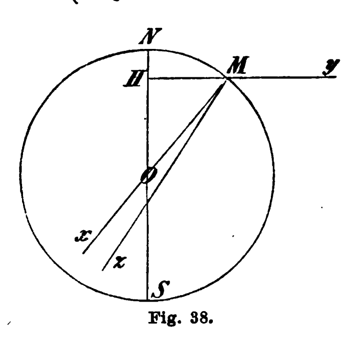


Fig. 38.

selben Schlusse gelangt man hinsichtlich der resultirenden Gestalt der Erdmasse, wenn man sich diese aus hinlänglich verschiebbaren Theilchen zusammengesetzt denkt, um dem Zuge der resultirenden Kraft folgen zu können, wie es z. B. die angenommene, ursprünglich feuerflüssige Beschaffenheit des Erdkörpers mit sich bringen würde. Es ergibt sich unter dieser Annahme die Entstehung eines aus concentrischen Schichten von gleicher Dichte zusammengesetzten, abgeplatteten Sphäroides. Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch in Kürze erwähnen, wie man sich durch Messungen an der Erdoberfläche vom Vorhandensein der Abplattung und deren Betrag thatsächlich überzeugt hat. Es ist dies durch die sogenannten Gradmessungen geschehen, deren Geschichte eigentlich bis auf Eratosthenes zurückzuführen wäre, der im J. 220 v. Chr. zur Zeit des Sommersolstitiums eine gleichzeitige Beobachtung der Zenithdistanzen der Sonne zu Syene und Alexandrien veranstaltete, aus der sich mit Rücksicht auf die bekannte Entfernung der beiden Beobachtungsorte ein angenäherter Werth für den Erdumfang ergeben hat; doch ist dabei eben von der Abplattung nicht die Rede gewesen. Wie diese durch Gradmessungen constatirt werden kann, mag folgende Betrachtung lehren.

Es sei (Fig. 39) uv ein Stück des durch den Beobachtungsort A gehenden (elliptischen) Erdmeridians, $AB = ds$ ein Bogenelement desselben und $d\alpha$ der Winkel der den Endpunkten des besagten Bogenelements entsprechenden Normalen, deren Segmente $AO = BO = \varrho$, also dem Krümmungsradius an der betrachteten Stelle des Meridians gleich sind. Unter dieser Voraussetzung ist offenbar:

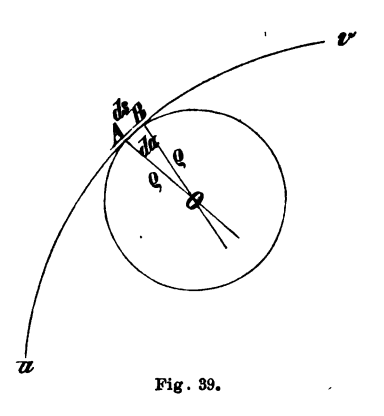


Fig. 39.

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{. . . . . 36)}$$

eine Relation, welche annähernd auch Geltung haben wird, wenn der Winkel $d\alpha$ einen verhältnissmässig kleinen endlichen Werth, z. B. entsprechend einem Grade hat, und somit AB die Länge des zugehörigen Meridianbogens auf der Erdober-

fläche vorstellt. Nennt man die unter dieser Voraussetzung in Betracht kommenden endlichen Werthe beziehungsweise s_1 und α_1, so gilt die Formel $\varrho = \frac{s_1}{\alpha_1}$. Denkt man sich α_1 nicht als Bogenlänge vom Radius 1, sondern in Graden ausgedrückt, so muss der Bruch $\frac{s_1}{\alpha_1}$ noch mit der Verhältnisszahl $\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$ multiplicirt werden und man erhält die Formel:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{s_1}{\alpha_1} \\ \text{oder, insofern } \alpha_1 = 1^0 \quad &\\ &\varrho = \frac{180}{\pi} \cdot s_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 37)$$

Der Meridianbogen s_1 wird durch geodätische Messungen ermittelt, während α_1 als der Winkel zwischen den Verticallinien der Beobachtungsorte A und B durch die Differenz der Polhöhen*) beider Orte gegeben ist, die durch astronomische Beobachtungen gefunden wird. Aus dem Gesagten ergibt sich sofort, dass die fragliche Abplattung der Erde gegen die Pole hin durch eine Zunahme der geodätisch gemessenen Gradlängen (man bemerke, dass hier immer von Polhöhengraden die Rede ist) sich kundgeben muss, wie es denn auch bei den besten Gradmessungen unzweifelhaft sich herausgestellt hat. (Widersprechende Resultate einer französischen Gradmessung zu Ende des 17. Jahrhunderts, welche zu einem langen Streite über die (eiförmige oder abgeplattete) Gestalt der Erde Anlass gaben, bis sie durch die entscheidenden Gradmessungen in Peru und Lappland widerlegt wurden, ferner die Wichtigkeit der Picard'schen Gradmessung in der Geschichte der Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch Newton, sowie endlich eine Aufzählung anderer, insbesondere neuerer Gradmessungen, müssen hier übergangen werden).

(**Abweichung fallender Körper nach Osten.**) Ueber diesen Gegenstand soll hier nur in Kürze Folgendes bemerkt werden.

---

*) Unter der Polhöhe eines Ortes versteht man bekanntlich den Winkel, welcher eine mit der Erdaxe parallele Visirlinie nach dem Himmelsgewölbe (annähernd nach dem Polarstern) mit dem Horizonte des Beobachtungsortes einschliesst; ein Winkel, der bei Annahme einer kugelförmigen Gestalt der Erde mit der geographischen Breite übereinstimmen würde.

Wir denken uns, um den einfachsten Fall vor Augen zu haben (Fig. 40), einen Punkt *B* des Aequators, der vermöge der Erdrotation um die Axe *O* eine gewisse östliche Tangentialgeschwindigkeit v besitzt. Ein in der Höhe h darüber befindlicher Körper *A* hat vermöge seines grössern Abstandes $r + h$ von der Axe offenbar eine grössere östliche Tangentialgeschwindigkeit v', und muss daher, wenn er fällt, östlich von *B*, etwa in *C*, die Erdoberfläche treffen. Eine östliche Abweichung fallender Körper, welche, wenn auch nicht unter so einfachen Verhältnissen, auch in anderen Breiten stattfinden muss, hat bereits Newton vorhergesagt und die Versuche Benzenberg's am Michaelsthurm zu Hamburg und Reich's im Dreibrüderschachte zu Freiberg haben dieselbe unzweifelhaft constatirt.

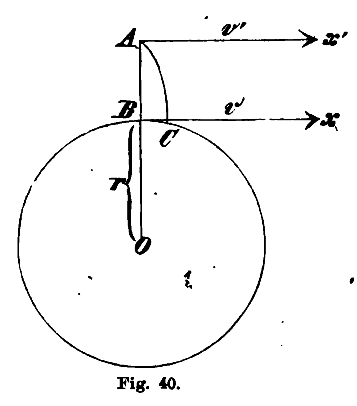


Fig. 40.

(**Passatwinde; Einfluss der Erdrotation auf den Lauf der Flüsse u. s. w.**) Die Entstehung der Passatwinde, welche schon in den Anfangsgründen besprochen zu werden pflegt, mag hier nur der Vollständigkeit wegen noch mit erwähnt werden, indem wir daran erinnern, dass die in den Aequatorialgegenden emporsteigenden erwärmten Luftmassen, indem sie sich auf beide Hemisphären nordwärts und südwärts ergiessen und die sogenannten Aequatorialströme bilden, zufolge der grösseren Tangentialgeschwindigkeit, welche sie in die höheren Breiten mitbringen, mit einer östlichen Geschwindigkeitscomponente auftreten, welche sie auf der nördlichen Hemisphäre als SW- und auf der südlichen Hemisphäre als NW-Wind erscheinen lässt, während die aus den höheren Breiten unten zuströmenden kalten Luftmassen (die sogenannten Polarströme bildend) vermöge der geringeren Tangentialgeschwindigkeit, welche sie aus ihren Parallelkreisen mitbringen, nach Westen zurückbleiben und in Folge dessen als Ostwinde erscheinen, beziehungsweise als NO auf der nördlichen und als SO auf der südlichen Hemisphäre.

Aehnliche Verhältnisse machen sich auch bei den Wassermassen der Flüsse geltend, wenn deren Lauf vorherrschend

nach Norden oder Süden gerichtet ist. Im erstern Falle (wir sprechen hier beispielsweise von der nördlichen Hemisphäre) werden die Gewässer mehr gegen das östliche, im letztern Falle gegen das westliche Ufer gedrängt.

Auch eine auffallend starke Abnutzung des östlichen oder westlichen Schienenstranges, welche man an Eisenbahnen bemerkt haben will, auf deren Geleise vorherrschend nach Norden oder nach Süden Züge verkehren, sowie ein angeblich häufigeres Vorkommen von Entgleisungen beziehungsweise auf Seite des einen oder des andern Schienenstranges, würden hieher gehören, um ihre Erklärung aus der Wirkung der Erdrotation zu finden.

(Anmerkung.) Am Schlusse unserer Erörterungen über die physikalischen Wirkungen der Erdrotation mag noch die historische Bemerkung Raum finden, dass die ersten Wahrnehmungen der Verschiedenheit der Acceleration der Schwere auf der Erdoberfläche im 17. Jahrhunderte vom französischen Astronomen Richer gemacht worden sind. Derselbe unternahm eine wissenschaftliche Reise von Paris nach Cayenne und beobachtete dort eine beträchtliche Retardation im Gange seiner in Paris regulirten Pendeluhr. Nachdem er die Uhr durch Verkürzung des Pendels neuerdings regulirt und wieder nach Paris zurückgebracht hatte, zeigte es sich, dass sie nun daselbst beträchtlich accelerirte, so dass das Pendel nun wieder verlängert werden musste, um die ursprüngliche Schwingungsdauer anzunehmen. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass die Ursache dieser Erscheinung in dem geringeren Werthe der Acceleration der Schwere zu Cayenne im Vergleiche mit der zu Paris gelegen war.

(Andere Rotationserscheinungen; Abweichung der Geschosse; Präcession der Nachtgleichen.) Es wurde bereits bei einer früheren Gelegenheit erwähnt, dass ein Körper bei der Rotation um die Axe des grössten und des kleinsten Trägheitsmomentes Stabilität zeigt. Zur Stabilität einer Axe ist immer erforderlich, dass dieselbe eine sogenannte freie Axe sei, mit deren Definition wir uns nun beschäftigen wollen. Die rings um die Axe O eines Körpers befindlichen Theilchen m_1, m_2 .... (Fig. 41) werden zufolge der Rotation von gewissen Fliehkräften be-

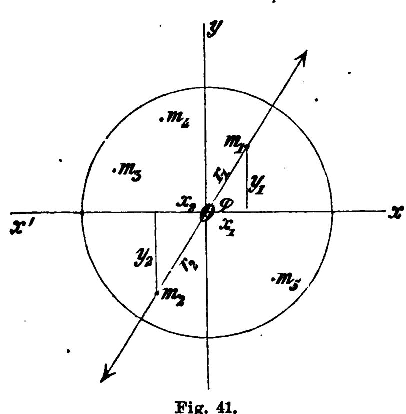


Fig. 41.

herrscht, welche sich, insofern sie in entgegengesetzte Richtungen fallen, gegenseitig bekämpfen und möglicherweise so angeordnet sein können, dass sich diese Kräfte an der Axe das Gleichgewicht halten und diese Axe daher keine einseitige Einwirkung erfährt. Wir nennen eine solche Axe eine freie Axe. Halten sich die besagten Kräfte nicht das Gleichgewicht, so lassen sich dieselben entweder auf eine einzige Resultirende zurückführen, welche in einem Punkte der Axe ihren Angriffspunkt hat, oder eine solche Reduktion ist unmöglich*). In beiden Fällen haben die betrachteten Kräfte das Bestreben, die Axe aus ihrer ursprünglichen Lage zu bringen und kann sonach Stabilität der Axe nicht stattfinden. Jede Axe, bezüglich welcher die Masse des Körpers symmetrisch angeordnet ist, ist eine freie Axe; es kann aber auch eine Axe eine freie sein, bezüglich welcher die Masse des Körpers nicht symmetrisch angeordnet ist. Es ist leicht zu zeigen, dass eine freie Axe nothwendig durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgehen muss. Denken wir uns die vorhin betrachteten Punkte $m_1, m_2 \ldots.$ auf zwei durch die Axe O gelegte aufeinander senkrechte Coordinatenebenen yox bezogen und wählen wir zwei diametral gegenüberliegende Punkte m_1 und m_2 aus., deren durch O gehende Verbindungslinie mit xx' den Winkel φ bildet, so erhalten wir für die Coordinaten dieser Punkte

$$x_1 = r_1 \cos \varphi, \qquad y_1 = r_1 \sin \varphi$$
$$x_2 = r_2 \cos \varphi, \qquad y_2 = r_2 \sin \varphi$$

und es ist leicht einzusehen, dass die entsprechenden beiden Fliehkräfte sich aufheben werden, wenn $m_1 r_1 = m_2 r_2$ (siehe Formel 32) also auch wenn $m_1 x_1 = m_2 x_2$ und $m_1 y_1 = m_2 y_2$ insofern wir uns die beiden vorhin besagten Fliehkräfte parallel zu Ox und Oy in Componenten zerlegt denken. Diese Gleichungen lassen sich auch in folgender Gestalt schreiben:

$$m_1 x_1 + (-m_2 x_2) = 0 \text{ und } m_1 y_1 + (-m_2 y_2) = 0,$$

welche algebraische Summen wir auch durch die Symbole $\Sigma m x = 0$ und $\Sigma m y = 0$ ausdrücken können. Denken wir uns nun diese Betrachtung auf je zwei Massentheilchen ausgedehnt, deren Fliehkräfte sich aufheben, so gelten schliesslich unter der Voraussetzung einer freien Axe für alle Theilchen des Körpers

*) Im Allgemeinen resultirt eine durch den Schwerpunkt gehende Einzelkraft und ein an der Drehungsaxe angreifendes Kräftepaar.

die Gleichungen $\Sigma mx = 0$ und $\Sigma my = 0$, also, wenn wir die Coordinaten des Schwerpunktes mit X und Y bezeichnen, nach Formel 14 auch die Gleichungen $X = 0$ und $Y = 0$; es liegt also der Schwerpunkt sowohl in der Ebene xx' als auch in der Ebene yy' und muss folglich in deren Durchschnittslinie, d. i. in der freien Axe O selbst gelegen sein. Es ist aber nicht umgekehrt jede Axe eine freie, die durch den Schwerpunkt geht, denn es ist keine Folge, dass parallele Kräfte, deren Summe $= 0$ ist, sich deshalb auch das Gleichgewicht halten müssen (Kräftepaar; siehe Figur 42).

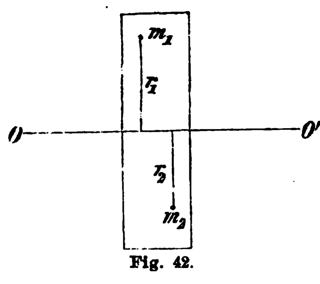


Fig. 42.

Die Mechanik lehrt, dass jeder Körper wenigstens drei freie Axen hat, welche im Schwerpunkte aufeinander senkrecht stehen und dass bezüglich zweier derselben Stabilität stattfindet. (Siehe Seite 62.)

Zur Demonstration des Gesagten und anderer Erscheinungen, die wir an rotirenden Körpern beobachten und sofort besprechen werden, dienen bekanntlich die Apparate von Bohnenberger, Fessel, Magnus und Anderen.

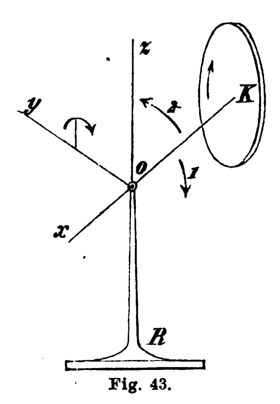


Fig. 43.

Wird die Axe OK (siehe Fig. 43, welche ein zur Demonstration der Erscheinungen des Kreisels u. dgl. geeignetes Modell vorstellt) eines rotirenden Kreisels einseitig unterstützt (in O), so ist, ausser der Rotation um die Axe OK, in Folge der Einwirkung der Schwere, die den Kreisel nach abwärts zieht (Pfeil 1), noch die Anregung zu einer zweiten Drehung um eine Axe Oy vorhanden, die auf der vorigen senkrecht steht und eine horizontale Stellung hat, während die Axe OK mit der Vertikalen OR einen beliebigen Winkel bilden mag. Erfolgen die Drehungen bezüglich der beiden Axen (OK und Oy) von O aus gesehen, in gleichem Sinne, also z. B. nach rechts, so würde, wenn in der That auch bezüglich der Axe Oy eine constante Winkelgeschwindigkeit vorhanden wäre, nach dem

vorgetragenen Satze vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten eine Rotation um eine zwischen OK und Oy in der Ebene KOy gelegene Axe resultiren müssen. Im vorliegenden Falle haben wir es zwar mit wesentlich anderen und complicirteren Verhältnissen zu thun, indem nur hinsichtlich der einen Axe eine constante Winkelgeschwindigkeit vorhanden ist, bezüglich der andern Axe aber die Anregung zu einer Winkelbeschleunigung durch die continuirliche Schwerkraft, weshalb wir das Problem, ohne die vorgezeichneten Grenzen dieser Darstellung zu überschreiten, nicht analytisch behandeln können; aber es ist aus der angedeuteten Betrachtung immerhin einleuchtend, dass die Axe des Kreisels unter den angegebenen Verhältnissen jedenfalls aus ihrer gegenwärtigen Lage ausweichen muss und zwar gegen y hin, wo dann im nächsten Augenblike dieselben Betrachtungen wieder Anwendung finden und zum Schlusse führen, dass ein weiteres Ausweichen der Axe OK in demselben Sinne erfolgen muss. Es ergibt sich hieraus, dass bei der vorausgesetzten Anordnung des Versuches die Axe OK des Kreisels eine Bewegung machen muss, welche, von oben angesehen, der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint. Eben diese Rotation um die Vertikalaxe Oz, in Verbindung mit der Rotation des Kreisels um seine Axe hat zur Folge, dass die vorhin erwähnte Neigung des Kreisels in Folge der Schwerkraft nach abwärts (Pfeil 1) durch ein Aufrichten dieser Axe gegen z hin (Pfeil 2) wieder ausgeglichen wird, indem ja den zuletzt betrachteten Axenrichtungen OK und Oz eine innerhalb des Winkels zOK liegende resultirende Axe entsprechen würde, gegen welche hin die Axe OK des Kreisels auszuweichen sucht, sobald die vorhin beschriebene Bewegung um die vertikale Axe eingetreten ist. Diese kreisende Bewegung erfolgt, solange die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um seine Axe constant ist und das Uebergewicht des einseitig unterstützten Kreisels nicht geändert wird, unter einer constanten Neigung der Kreiselaxe OK gegen die Vertikale Oz und mit constanter Geschwindigkeit, d. h. die Axe des Kreisels beschreibt unter dieser Voraussetzung gleichförmig die Mantelfläche eines vertikalen Kegels. Der Sinn dieser Bewegung wird der entgegengesetze, wenn die Drehungsrichtung des Kreisels umgekehrt wird oder aber, wenn man dem Kreisel, etwa durch Anhängen von Gewichten bei x, nach der entgegen-

gesetzten Seite hin das Uebergewicht ertheilt. Mit abnehmender Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels senkt sich seine Axe und macht eine immer schnellere Bewegung um die Vertikale. Diese Darstellung ist, wie gesagt, nur als eine populäre Erklärung der Bewegungen des Kreisels zu betrachten, ähnlich derjenigen (aber vielleicht einfacher und anschaulicher), welche Poggendorff im 90. Bande der Annalen gegeben hat, mit Hilfe eines Modells, welches wir durch das in Fig. 43 dargestellte ersetzt haben.

Wenn wir in unserem Modelle bei ungeänderter Rotationsrichtung des Kreisels das Uebergewicht in entgegengesetztem Sinne angebracht denken, so dass sich seine Rotationsaxe OK anstatt nach abwärts zu neigen, aufzurichten sucht, so haben wir den Fall veranschaulicht, der bei einem aus einem rechtsläufig gezogenen Geschütze abgefeuerten Langgeschosse in Betracht kommt, welches, wie wir später sehen werden, von Seite des Luftwiderstandes eine Einwirkung erfährt, welche die Spitze des Projektils nach aufwärts zu kehren strebt. Nach dem bereits Gesagten wird unter solchen Verhältnissen ein Ausweichen der Rotationsaxe, von O aus gesehen, nach rechts stattfinden müssen, was, auf den Fall des Projektils angewendet, so viel heisst, als dass die Rotationsaxe desselben, von einem hinter dem Geschütze aufgestellten Beobachter aus gesehen, nach rechts aus der Vertikalebene ausweichen muss. Ist dies erst geschehen, so wird die fernere Einwirkung des Luftwiderstandes ein weiteres Heraustreten des Projektils aus der Bahn, die es ohne Einwirkung des Luftwiderstandes beschreiben würde, eine sogenannte Abweichung, zur Folge haben. Dabei ist zu beachten, (Fig. 44) dass der Luftwiderstand sich immer

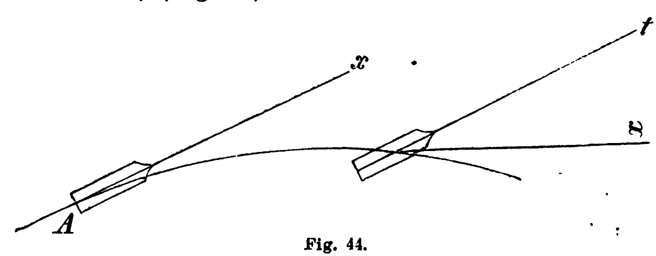


Fig. 44.

in der Richtung der Tangenten x (Bewegungsrichtung) geltend macht, während das Projektil, welchem durch die Züge des Geschützes eine rotirende Bewegung ertheilt worden ist,

vermöge eben dieser Rotation um seine Längenaxe bezüglich derselben ein Beharrungsvermögen äussert, und somit eine zur ursprünglichen Bewegungsrichtung Ax (Seelenaxe) parallele Stellung t beizubehalten sucht, welche Axenrichtung jedoch unter der drehenden Einwirkung des Luftwiderstandes sofort jene Lagenänderungen erfährt, deren Gesetz wir bereits beim Kreisel erörtert haben. Figur 45 stellt vor, wie die Rotationsaxe Ox des Projektils, wenn eine gleichzeitige Anregung zu einer Drehung um Oy mit der Spitze nach aufwärts vorhanden ist, eine Lagenänderung gegen Oy hin erfährt, gewissermassen einer kreisenden Bewegung um Oz entsprechend.

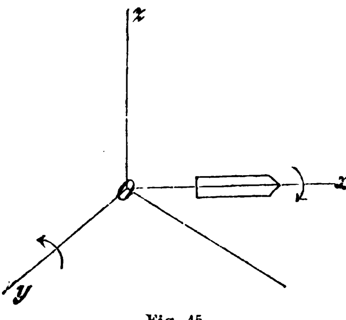


Fig. 45.

Es ist einleuchtend, dass bei Anwendung eines linksläufig gezogenen Geschützes unter übrigens gleichen Umständen (also ebenfalls bei aufwärts drehender Wirkung des Luftwiderstandes) eine Abweichung nach links stattfinden müsste, wie dies auch durch Versuche in der preussischen Artillerie bestätigt worden ist. Man fasst dieses Verhalten in die Regel zusammen, dass bei aufwärts drehender Wirkung des Luftwiderstandes die Abweichung immer **mit** dem Drall*) stattfindet (d. h. nach rechts bei rechtsläufigem, nach links bei linksläufigem Drall) ebenso ist klar, dass, wenn die Wirkung des Luftwiderstandes eine abwärts drehende wäre, die Abweichung stets **gegen** den Drall (also nach links bei rechtsläufigem und nach rechts bei linksläufigem Drall) erfolgen müsste. Ob nun aber die Wirkung des Luftwiderstandes eine aufwärts- oder abwärtsdrehende ist, hängt nach den Untersuchungen von **Magnus**, welchem wir überhaupt die umfassendsten Aufklärungen über diesen Gegenstand verdanken, von der Form des Projektils ab, wie im Nachstehenden kurz angedeutet werden soll. Man denke sich (Fig. 46) ein in der Richtung Sx

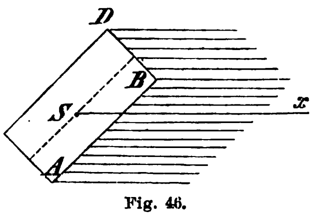


Fig. 46.

*) Unter Drall im engeren Sinne versteht man die einem ganzen Schraubengange des Zuges entsprechende Länge, also die Höhe eines Schraubenganges, von welchem etwa nur $^1/_4$ auf die Länge des Geschützes entfällt

fortschreitendes cylindrisches Projektil, wobei sich also der Druck des Luftwiderstandes in der Richtung der in der Zeichnung dargestellten Parallelen einerseits auf die Mantelfläche *AB* und andererseits auf die Basis *BD* geltend machen wird. Es ist klar, dass längs der Mantelfläche *AB* gegen *A* hin ein leichteres Abgleiten der Luft stattfindet als gegen *B* hin, wo gewissermassen eine Stauung eintritt, und dass daher die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Mantelfläche eine aufwärts drehende (*B* nach aufwärts) sein wird. Ebenso sieht man ein, dass die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Basis *BD* das entgegengesetzte Bestreben hat, nämlich den Cylinder abwärts zu drehen. Die Folge davon wird sein, dass von diesen entgegengesetzten Einwirkungen die eine oder die andere die Oberhand bekommen wird, nach Massgabe der Neigung der Cylinderaxe gegen die Bewegungsrichtung. Vornehmlich aber geht aus dem Gesagten hervor, wie eben die Gestalt des Projektils (wenn die Neigung gegen die Bewegungsrichtung innerhalb gewisser Grenzen liegt) den Sinn der Drehung des Luftwiderstandes bestimmt,*) weshalb auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen wäre, Projektile herzustellen, welche eine abwärts drehende Wirkung von Seite des Luftwiderstandes oder vielleicht auch solche, welche nahezu gar keine drehende Wirkung des Luftwiderstandes erfahren würden. Im letzteren Falle würde auch die Abweichung des Projektils nahezu entfallen; d. h. es würden sich, da eine absolute Genauigkeit doch nie erreichbar wäre, kleine Abweichungen bald nach rechts, bald nach links ergeben, was der normalen Seitenabweichung nach rechts kaum vorzuziehen wäre.

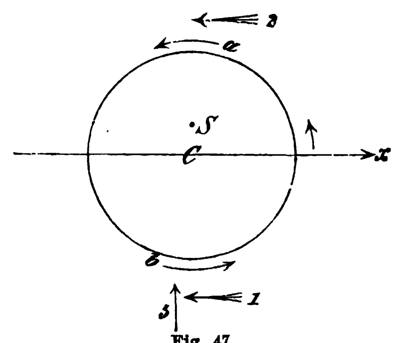


Fig. 47.

Eine Abweichung anderer Art hat man schon früher an den kugelförmigen Geschossen, welche aus g l a t t e n G e s c h ü t z e n abgefeuert wurden, beobachtet. Sie rührt von einer im Allgemeinen unvermeidlichen excentrischen

*) Den Grundsatz, nach welchem man die drehende Wirkung des Luftwiderstandes in der dargestellten Weise beurtheilen kann, pflegt man nach M a g n u s das Princip vom leichteren oder schwereren Abfluss der Luft zu nennen.

Lage des Schwerpunktes S (Fig. 47) der Kugeln her und verhält sich in der Weise, dass sie nach der Seite hin erfolgt, auf welche der Schwerpunkt der Kugel beim Laden zu liegen kommt. Liegt also der Schwerpunkt der Kugel, von einem hinter dem Geschütze stehenden Beobachter aus gesehen, nach rechts, so findet eine Abweichung nach rechts statt, nach links im entgegengesetzten Falle; und eine Lage des Schwerpunktes nach oben oder unten zu bedingt beziehungsweise eine Vergrösserung oder Verkleinerung der Wurfsweite. Auch hier ist die Wirkung der Luft wesentlich mit im Spiele, insofern bei jeder Rotation (hier wird eine solche eben durch die excentrische Lage des Schwerpunktes bedingt) eine mehr oder weniger lebhafte Luftströmung in der Nähe des rotirenden Körpers eingeleitet wird, indem ja an der Oberfläche eines jeden Körpers eine Luftschicht adhärirt, welche bei der Rotation die angrenzenden Luftschichten mit in die Bewegung hineinzieht, wie man dies z. B. mittelst einer Kerzenflamme leicht ersichtlich machen kann, die bei der Annäherung an einen rotirenden Kreisel lebhaft angeblasen und endlich ausgelöscht wird. Erwägen wir nun, dass der resultirende Druck der Pulvergase stets die centrale Richtung Cx hat, so ist klar, dass, wenn der Schwerpunkt nach oben in S liegt, eine Rotation der Kugel in der Richtung der beigefügten Pfeile a, b stattfinden muss, welche Pfeile zugleich die Richtungen der durch die rotirende Kugel erregten Luftströmungen andeuten. Oberhalb der Kugel ist diese Strömung mit der durch die fortschreitende Bewegung hervorgerufenen relativen Bewegung der Luft (Pfeil 2) gleichgerichtet, unterhalb der Kugel aber begegnen sich die beiden Luftströme (b und 1) und verursachen hier eine Stauung, welche als ein nach aufwärts gerichteter Druck (Pfeil 3) auf die Kugel einwirkt und, wie gesagt, eine Vergrösserung der Wurfsweite zur Folge haben muss; liegt der Schwerpunkt unter C, so muss selbstverständlich das Gegentheil, nämlich schliesslich eine Verkürzung der Wurfsweite eintreten. Diese beiden Fälle sind die einer Abweichung nach aufwärts oder nach abwärts aus der Flugbahn, welche eine nichtexcentrische Kugel zurücklegen würde. Es bedarf nach dem Gesagten wohl keiner näheren Erläuterung, dass, falls der Schwerpunkt eine seitliche Lage nach rechts oder links hin hätte, aus den bereits angeführten Ursachen eine Seitenabweichung beziehungsweise nach rechts oder links hin

erfolgen müsste. Zur Demonstration der bei dieser Erklärung in Betracht kommenden Luftströmungen dienen die instructiven Apparate von Magnus und von Beetz.

Eine verwandte Erscheinung, deren Besprechung auch hierher gehört, deren ausführliche Erörterung uns aber zu weit führen würde, ist die Präcession der Nachtgleichen.

Die abgeplattete Gestalt der Erde, deren Axe *NS* bekanntlich gegen die Ebene *OS* ihrer Bahn geneigt ist, hat zur Folge, dass die von der Sonne ausgehende Anziehung, indem dieselbe auf den der Sonne zugewendeten Theil *Q* der Erde stärker als auf den entgegengesetzten *A* einwirkt, den Erdkörper zu einer Drehung anregt, welche die geneigte Axe gegen die zur Bahnebene senkrechte Stellung *zz′* aufzurichten sucht,

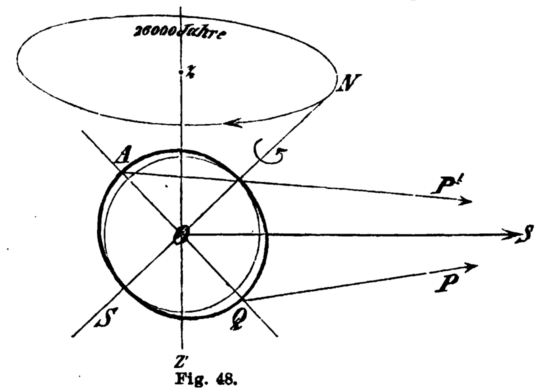


Fig. 48.

Aus den vorgetragenen und bereits wiederholt angewendeten Grundsätzen leuchtet ohne weitere Erörterung ein, dass diese Anregung zur Drehung in Verbindung mit der östlichen Rotation der Erde um ihre Axe eine solche Bewegung der letzteren zur Folge haben muss, dass die Durchschnittslinie des Aequators mit der Ebene der Erdbahn (Verbindungslinie der Nachtgleichenpunkte) fortwährend in westlicher Richtung zurückweicht, was eine Zunahme der sogenannten astronomischen Länge der Fixsterne zur Folge hat. Diese Bewegung beträgt jährlich durchschnittlich 50 Sekunden oder in 72 Jahren 1 Grad, also etwa in 26000 Jahren einen Umlauf. Da nun ein Sternbild des Thierkreises 30 Grade einnimmt, so geht daraus hervor, dass die Sternbilder seit 2000 Jahren (man hat Abbildungen aus solcher Zeit in ägyptischen Tempelruinen gefunden) ungefähr um die ganze Länge eines Sternbildes von jener Nachtgleichenlinie aus nach Osten scheinbar vorgerückt sind. Es erscheinen also die in jener Zeit den Nachtgleichen entsprechenden Sternbilder nach Osten vorgeschoben, weshalb man die Erscheinung als ein Vorrücken (Präcession) der Nacht-

gleichen bezeichnet, während sie eigentlich in einem Zurückweichen der Aequinoctiallinie besteht. Die Anziehung des Mondes auf die abgeplattete Erde bewirkt Störungen im Gange der Präcession, die man als Schwankung oder, wie man sagt, Nutation der Erdachse bezeichnet, worauf wir jedoch hier nicht weiter eingehen wollen.

(**Drehungstheorie; Euler; Poinsot.**) Die Theorie des Kreisels ist in Euler's Mechanik sehr eingehend behandelt; das Problem der Drehbewegung eines freien Körpers hat Poinsot in grosser Allgemeinheit und Eleganz gelöst, indem er die Bewegung des Körpers auf die rollende Bewegung des Centralellipsoides (siehe Seite 62) zurückführt.

(**Dichte der Erde.**) Den im Vorstehenden bereits gemachten Mittheilungen über gewisse physikalische Verhältnisse des Erdkörpers: Verschiedenheit der Schwere, Abplattung u. s. w. möge sich noch eine kurze Erwähnung der Methoden anschliessen, durch welche es gelungen ist, über die mittlere Dichte des Erdkörpers Aufschluss zu bekommen. Eine dieser Methoden, welche Cavendish angewendet hat, beruht darauf, dass die Anziehung einer kleinen Kugel von Seite der Erde mit der Anziehung eben dieser Kugel von Seite einer grossen Kugel von bekannter Masse mittelst einer zweckmässig construirten Drehwage auf eine hier nicht näher zu erläuternde Art verglichen wurde. Ein zweites Verfahren, von Airy, beruht darauf, dass die Intensität der Schwere innerhalb der Erdoberfläche als eine andere Funktion der Entfernung vom Mittelpunkte sich darstellt, als ausserhalb der Erdoberfläche, wovon später die Rede sein soll, ohne dass wir jedoch auch auf diese Methode weiter eingehen wollen. Ein drittes Hilfsmittel über die mittlere Dichte der Erde Aufschluss zu bekommen, beziehungsweise dieselbe mit Körpern von bekannter Dichte zu vergleichen, hat sich in der sogenannten Ablenkung des Bleilothes durch nahestehende Gebirgsmassen dargeboten.

Auf diesem Wege hat Maskelyne die Dichte der Erde bestimmt. Dass eine solche Ablenkung des Pendels AM (Fig. 49) in der Nähe eines Berges S in Folge der gegenseitigen Massenanziehung stattfinden muss und dass der Betrag dieser Ablenkung α bei bekannter geognostischer Beschaffenheit, Gestalt und Entfernung des Berges einen Vergleich seiner Masse (mit Hilfe des Gravitationsgesetzes) mit jener der Erde

gestattet, ist wohl einleuchtend. Freilich ist dies nicht in dem Sinne aufzufassen, als ob die besprochene Ablenkung thatsächlich an einem Bleilothe unmittelbar beobachtet würde, indem vielmehr die entsprechende Ablenkung des Libellenniveaus an den zu den betreffenden Polhöhenbestimmungen verwendeten Messinstrumenten bei der direkten Beobachtung unmittelbar in Betracht kommt. Um nun eine genaue Vorstellung von dem in Rede stehenden Verfahren zu bekommen, denke man sich etwa nördlich von einem Berge, in dessen Nähe die Polhöhe PAR' (siehe Seite 78, Anmerkung) gemessen. Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, wird man bei dieser Messung nothwendig einen grösseren Werth $\varphi + \alpha$ für die Polhöhe erhalten, als wenn der Berg nicht vorhanden, somit auch Bleiloth und Niveau nicht abgelenkt wären, in welchem Falle man den Winkel PAR als Polhöhe gemessen und dafür den Betrag φ erhalten hätte; denselben Betrag φ wird man offenbar erhalten, wenn die Polhöhe an einem andern Beobachtungsorte desselben Parallelkreises (also von derselben geographischen Breite mit A), jedoch frei von ähnlichen lokalen Einflüssen gemessen wird. Hätte man auf diese oder auf eine andere später zu besprechende Art die durch die Anziehung des Berges bewirkte Differenz α zwischen der scheinbaren und wahren Polhöhe gefunden, welche Differenz eben die sogenannte Ablenkung des Bleilothes ist, so könnte man daraus in folgender Weise einen Betrag für die mittlere Dichte der Erde ableiten. Denken wir uns der Einfachheit wegen die Verbindungslinie zwischen dem Schwerpunkte S des Berges und der beeinflussten Pendelmasse M, beziehungsweise M' (wir wollen uns in der That für einen Augenblick ein Pendel vorhanden denken) nahezu horizontal, so stellen sich uns die von Seite der Erde und des

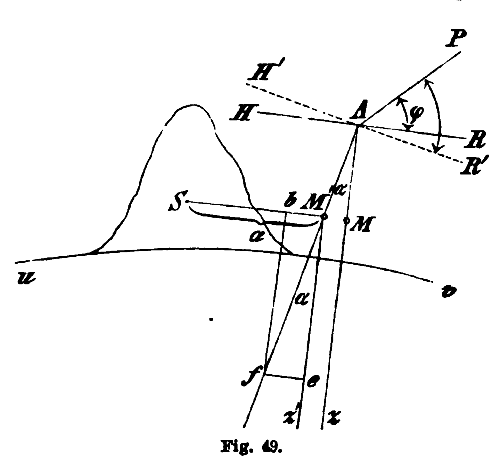


Fig. 49.

Berges ausgeübten Anziehungen als aufeinander senkrechte Kräfte $M'e$ und $M'b$ dar, deren Resultirende $M'f$ natürlich in die Richtung des abgelenkten Pendels fällt. Nennen wir die Massen des Berges, der Erde und des Pendels beziehungsweise m', m und μ, so sind die besagten Anziehungen nach dem Gravitationsgesetze $M'b = k \cdot \frac{m'\mu}{M'S^2} = \frac{k\,m'\mu}{a^2}$ und $M'e = \frac{k\,m\,\mu}{r^2}$, wobei r den Erdhalbmesser bedeutet; es ist also $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m'}{a^2} : \frac{m}{r^2}$; nennen wir nun d' die Dichte des Berges, v' sein Volumen, d die Dichte der Erde und v ihr Volumen, in welchem Falle offenbar $\frac{m'}{m} = \frac{v'd'}{vd}$ also $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{v'd'}{vd}$ und somit

$$d = \frac{d'}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{v'}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass wir von dem behufs dieser Darstellung angenommenen Pendel absehen können, indem dessen Masse μ nicht weiter in Betracht kommt, sondern eben nur die bei den Polhöhenbestimmungen gefundene Differenz α' und andere als bekannt angenommene Grössen.

Denkt man sich (Fig. 50) nördlich und südlich vom Berge S in A und B Polhöhenbestimmungen vorgenommen, wobei also die scheinbare Polhöhe in A grösser, in B kleiner als die wahre herauskommen muss, so kann man die Differenz dieser scheinbaren Polhöhen mit der aus der geographischen Lage der Beobachtungsorte bekannten Differenz der wahren Polhöhen vergleichen und auf diese Art zu einer Grösse gelangen, welche die Massenanziehung des Berges noch auffallender herausstellt. Könnte man z. B. annehmen, dass die Wirkungen in A und B von gleichem Betrage wären (was in Wirklichkeit freilich nur annähernd vorkommen kann), so würde die besagte Grösse dem doppelten Werthe von α gleichkommen und hieraus wieder mittelst der obigen Formel die Dichte der Erde sich ergeben. Im entgegengesetzten Falle

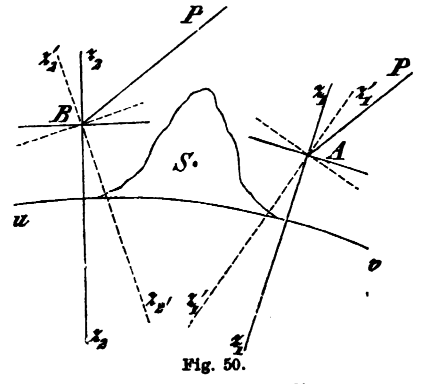


Fig. 50.

werden weitläufigere Rechnungen nothwendig, mit welchen wir uns hier nicht weiter befassen wollen. Mittelst dieser und der andern Methoden der Dichtebestimmung der Erde hat man Zahlen gefunden, welche durchschnittlich auf eine 5—6 mal grössere mittlere Dichte, als die Dichte des Wassers ist, hinweisen. Es verdient erwähnt zu werden, dass Newton mit einem merkwürdigen Scharfsinne schon von vornherein eine etwa 5malige mittlere Dichte der Erde vermuthet hat. Erwägt man endlich, dass die mittlere Dichte der geognostisch durchforschten Erdrinde sehr viel kleiner ist, als diese mittlere Dichte, so ergibt sich daraus noch die Folgerung auf das Vorhandensein von Schichten viel grösserer Dichte im Innern der Erde.

(**Ebbe und Fluth.**) Wir wollen endlich noch jene Masseneinwirkungen des Mondes und der Sonne auf die Erde erwähnen, welche sich in den bekannten Erscheinungen der Ebbe und Fluth geltend machen, deren Erklärung man auf folgende Erwägungen zurückzuführen pflegt.

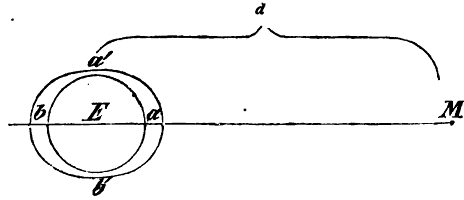


Fig. 51.

Denken wir uns den Mond M (Fig. 51) im Abstande d von der Erde E, deren Massen beziehungsweise μ und m sein mögen, so wird der Betrag der Anziehung F dieser Himmelskörper nach dem Gravitationsgesetze bekanntlich ausgedrückt durch

$$F = \frac{k\,m\,\mu}{d^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 39)$$

wobei k die gegenseitige Anziehung der Masseneinheiten in der Entfernungseinheit bedeutet. Die vom Monde ausgehende Anziehung f auf die Masseneinheit im Mittelpunkte der Erde wird also $= \frac{k\mu}{d^2}$ sein $= \frac{A}{d^2}$. Ist nun r der Erdhalbmesser, so werden die Anziehungen auf die Masseneinheit an der dem Monde zugewendeten und abgewendeten Seite der Erdoberfläche beziehungsweise $\frac{A}{(d-r)^2}$ und $\frac{A}{(d+r)^2}$ betragen. Zieht man von diesen Grössen den Betrag der im Erdmittelpunkt ausgeübten Mondanziehung $\frac{A}{d^2}$ ab, so erhält man, wenn man r als eine im Ver-

gleiche mit d sehr kleine Grösse betrachtet (der Mond ist bekanntlich 60 Erdhalbmesser von der Erde entfernt) beziehungsweise die Differenzen $\pm \frac{2\,A\,r}{d^3}$. Die Sache verhält sich in Folge dessen so, als wenn in a ein Zug gegen M hin und in b ein Zug in entgegengesetzter Richtung, jeder vom Betrage $\frac{2\,A\,r}{d^3}$ ausgeübt würde, was die unter dem Namen Fluth bekannte Erhebung der Wassermassen in a und b zur Folge hat, die von einer entsprechenden Abnahme der Wassermassen (Ebbe) in a' und b' begleitet sein muss. In Folge der Erdrotation muss sich die Fluthwelle von Osten nach Westen verschieben und entspricht jedem Meridian ein täglich zweimaliges Eintreten von Fluth und Ebbe, wobei sich jedoch mit Rücksicht auf die Mondbewegung eine tägliche Verspätung um 50 Minuten bemerkbar machen muss. Durch ähnliche Betrachtungen überzeugt man sich, dass auch die Sonne dieselben Erscheinungen, jedoch wegen der dabei in Rechnung kommenden Grössenverhältnisse in einem viel geringeren Betrage (etwa ½) auf der Erde hervorbringt. Beide Wirkungen können nach Massgabe der gegenseitigen Stellung der drei Himmelskörper auch mit ihrer Summe oder mit ihrer Differenz sich geltend machen. Im ersteren Falle (Conjunktion und Opposition, d. i. Neumond und Vollmond) entstehen die sogenannten Springfluthen, im zweiten Falle (Quadraturen, d. i. erstes und letztes Viertel) die viel schwächeren Nippfluthen. Durch die Verschiedenheit der Meerestiefen und die Gestaltung des Festlandes wird das Gesetz der Ebbe und Fluthbewegung ein sehr verwickeltes, doch ist das Problem von Laplace in grosser Allgemeinheit gelöst worden. Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Ebbe- und Fluthbewgung eine Rückwirkung auf die rotirende Erde äussert und zwar auf Kosten der Rotationsgeschwindigkeit, worauf wir jedoch hier nicht weiter eingehen wollen. Erwägen wir anderseits die allmälige Abkühlung des Erdkörpers, welche für sich allein durch Verminderung des Trägheitsmomentes eine Vermehrung der Rotationsgeschwindigkeit bewirken müsste, so haben wir es hier mit zwei Wirkungen zu thun, welche sich gegenseitig mehr oder weniger compensiren. In der That ist eine Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde bis jetzt bekanntlich nicht constatirt worden.

(**Zusammensetzung der Bewegungen.**) Bevor wir auf die Erörterung jener allgemeinen Gesetze der Mechanik eingehen, welche das von der Mechanik fester Körper handelnde Hauptstück abschliessen sollen, mögen noch einige Lehrsätze kurze Erwähnung finden, auf welche man sich namentlich in der Lehre vom Schall häufig beruft. Wir wollen zunächst von den im Gebiete der Akustik vielfach in Betracht kommenden Bewegungen sprechen, welche sich aus rechtwinklig combinirten Schwingungen ergeben. Dabei mag als einleitende Bemerkung ein kurze Hinweisung auf die Bedingungen stattfinden, unter welchen bei der Zusammensetzung von Bewegungen geradlinige oder krummlinige Bewegungen resultiren und wie man die Beschaffenheit der letzteren ermitteln kann. Denkt man sich (Fig. 52) die Richtungen Ax und Ay der auf den Punkt A gleichzeitig übertragenen Bewegungen als Coordinatenaxen und wird die Bewegung in der Richtung Ax durch das Gesetz $AB = x = Af(t)$, jene in der Richtung Ay durch $AC = y = Bf(t)$ vorgestellt, so erhält man hieraus sofort: $y = \frac{B}{A} \cdot x$ und erkennt, dass

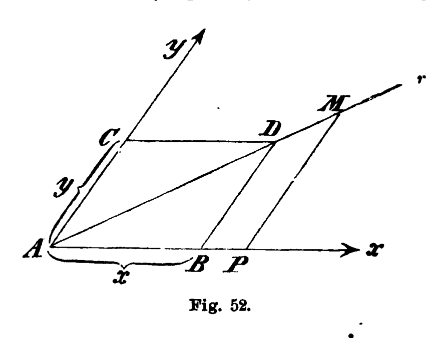


Fig. 52.

die Resultirende eine Gerade Ar sein muss, welche durch den Ursprung der Coordinaten hindurchgeht. Dies wird also immer stattfinden, wenn die beiden gleichzeitigen Bewegungscomponenten x und y einer und derselben Funktion der Zeit proportional sind, also z. B. $x = At$, $y = Bt$ bei einer gleichförmigen oder $x = At^2$, $y = Bt^2$ bei einer gleichförmig beschleunigten oder $x = A \sin(\sqrt{k} \cdot t)$, $y = B \sin(\sqrt{k} \cdot t)$ bei einer schwingenden Bewegung. Im letzteren Falle kann man also sagen, dass eine gradlinige Schwingung resultirt, wenn die combinirten Schwingungen gleiche Schwingungsdauer und gleiche Phasen haben, da eben $\sqrt{k} \cdot t$ den sogenannten Phasenwinkel vorstellt (Formel 10) und $\sqrt{k}$ für die Schwingungsdauer massgehend ist (Formel 9). Ist die obige allgemeine Bedingung nicht erfüllt, so ergeben sich krummlinige Bewegungen, z. B. wenn $x = At^2$, $y = Bt$. Wir erhalten in diesem Falle

$y^2 = \frac{B^2}{A} \cdot x$, was uns eine parabolische Bahn für die resultirende Bewegung andeutet; oder hätte man für zwei schwingende Bewegungen die Gleichungen $x = A \sin(\sqrt{k} \cdot t)$ und $y = B \sin[\sqrt{k}(t + \delta)]$, so führt die Rechnung auf eine Gleichung des zweiten Grades und gibt uns also zu erkennen, dass die resultirende Bewegung in einer Kegelschnittslinie erfolgen muss. Diese kann offenbar keine andere sein als die Ellipse, da aus der Natur des Problems hervorgeht, dass die Bewegung innerhalb eines endlichen Raumes vor sich gehen, die betreffende Kegelschnittslinie also eine geschlossene sein muss. Die Ellipse geht in den Kreis über, wenn bei rechtwinklig combinirten Schwingungen $A = B$ und gleichzeitig $\sqrt{k} \cdot \delta = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn die combinirten Schwingungen gleiche Amplituden haben und um $\frac{1}{4}$ der Schwingungsdauer differiren. Ist nämlich $\sqrt{k} \cdot \delta = \frac{\pi}{2}$, so ist wegen $\sqrt{k} = \frac{2\pi}{T}$ (Formel 9) $\frac{2\pi\delta}{T} = \frac{\pi}{2}$, also $\delta = \frac{T}{4}$.

Sind aber nicht nur die Phasenzeiten t, sondern auch die Schwingungszeiten T, somit die Werthe von k verschieden, so ergeben sich für die resultirende Bewegung Curven höherer Ordnung, welche, da sie bei den akustischen Versuchen von Lissajous zur Sprache kommen, häufig auch die Lissajous'schen Curven genannt werden. Ihre Construktion geschieht leicht mit Zuhilfenahme des Seite 56 vorgetragenen Satzes, dass die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf den Durchmesser als eine schwingende Bewegung sich darstellt und umgekehrt. Trägt man nämlich auf die Geraden, welche die doppelten Amplituden ($2a$, Seite 55) der rechtwinklig combinirten Schwingungen vorstellen, Halbkreise auf und theilt dieselben, wie Fig. 53 zeigt, dem Verhältnisse der Schwingungszeiten entsprechend ein, also z. B. die eine Kreisperipherie in Achtel, die andere in Sechs-

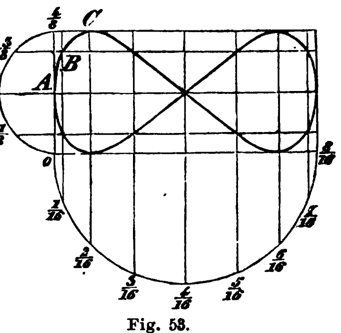


Fig. 53.

zehntel, wenn sich die betreffenden Schwingungszeiten wie 8:16 verhalten und zieht von den Theilpunkten Parallele zu den beiderseitigen Amplituden, so findet man aus den entstehenden Durchschnittspunkten mittelst des Parallelogramms der Bewegungen leicht diejenigen heraus, welche der resultirenden Bahn entsprechen müssen und diese daher bestimmen. Dabei wird man jedoch berücksichtigen müssen, ob die beiden Bewegungen mit gleichen Phasen zusammenwirken oder nicht. Um dies zu erläutern, wollen wir beispielsweise eine combinirte Schwingung betrachten, bei welcher eine Phasendifferenz von $\frac{1}{4}$ Schwingung stattfindet und zwar in der Art, dass die Componente, deren Bewegung in der Figur in Achtel getheilt erscheint (deren Schwingungsdauer eben die Hälfte von jener der andern ist) um $\frac{1}{4}$ Schwingung voraus ist. Die resultirende Bewegung verläuft dann, wenn wir z. B. *A* (wo die eine Bewegungscomponente am Ende einer Elongation, die andere am Beginne einer Elongation ist) als Ausgangspunkt betrachten, in der Curve *ABC*. . . . ., welche in sich zurückkehrt und zwei Scheitel auf Seite der langsameren, einen auf Seite der schnelleren Bewegungscomponente darbietet. Es verdient bemerkt zu werden, dass man in ähnlicher Weise aus der Zahl der Scheitel auf Seite der beiden Bewegungscomponenten auch in anderen Fällen das Verhältniss der Schwingungszeiten entnehmen kann. So ist es (wenn wir uns z. B. tönende Körper als schwingende denken) bei der Oktav 1:2, bei der Quinte 2:3, bei der Quart 3:4 u. s. w.

Da es nicht möglich ist, das einer bestimmten Figur entsprechende Verhältniss der Schwingungszeiten bei der experimentellen Ausführung mit aller Schärfe zu treffen, so werden die Erscheinungen, welche einen constanten Gangunterschied voraussetzen, in etwas modificirt, was wir an einem Beispiele erläutern wollen. Nehmen wir an, die Schwingungszeiten, welche in einem gegebenen Falle genau gleich sein, das heisst im Verhältnisse 1 : 1 stehen sollten, wären es nicht, sondern z. B. in der Art verschieden, dass auf 10 Schwingungen der einen Componente (I) 11 Schwingungen der zweiten Componente (II) entfallen. Dies wird zur Folge haben, dass nach der ersten Schwingung von I die andere Componente um $^1/_{10}$, nach der zweiten Schwingung um $^2/_{10}$ ihrer Schwingungsdauer u. s. f. voraus ist. Wir haben es also dann mit einem von Schwingung zu Schwingung veränderlichen Gangunterschiede zu thun,

was entsprechende Aenderungen in der resultirenden Figur mit sich bringt, bis mit der 10ten Schwingung von I die 11te von II wieder zusammenfällt, indem der wachsende Gangunterschied nunmehr den Betrag einer ganzen Schwingung erreicht hat. Man beobachtet in einem solchen Falle allmälig ineinander übergehende, periodisch wiederkehrende Gestaltungen der Lissajous'schen Figuren, und es ist leicht einzusehen, dass diese periodischen Aenderungen desto langsamer vor sich gehen werden, je grösser die Annäherung ist, mit welcher man das richtige Verhältniss der Schwingungszeiten getroffen hat. Diese sogenannten Lissajous'schen Figuren sind eingentlich die Figuren des wohlbekannten von Lippich und Melde vervollkommneten Wheatstone'schen Kaleidophons, haben aber in neuerer Zeit durch die Lissajous'schen Versuche, welche in der Akustik zur Sprache kommen, eine grössere Wichtigkeit erlangt.*)

(**Elasticitätsmodulus.**) Zu den zu Anfang des vorigen Paragraphen erwähnten, für die Akustik belangreichen Lehrsätzen gehört auch ein Satz, der auf das Verhalten elastischer Körper Bezug hat und zum Begriffe des sogenannten Elasticitätsmodulus führt. Das Verhalten elastischer Körper ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, dass, wie schon Seite 56 bemerkt wurde, die Kraft, welche zur Verschiebung der Theilchen eines elastischen Körpers erforderlich ist, somit auch die entsprechende Rückwirkung der Elasticität, innerhalb gewisser Grenzen der Grösse der bewirkten Verschiebung proportional sich herausstellt. Denken wir uns, um einen einfachen Fall vor Augen zu haben, einen prismatischen, elastischen Körper, vom Querschnitte 1 und von der Länge l an seinem oberen Ende befestigt, und am unteren Ende dem Zuge eines daselbst angehängten Gewichtes p ausgesetzt. Die Längenausdehnung, welche der Körper unter diesen Umständen erfährt, heisse $\triangle l$. Solange eine gewisse Belastung P, welche man das Elasticitätsgrenzgewicht zu nennen pflegt (oder auch Elasticitätsgrösse) nicht überschritten wird, entspricht einer Zugkraft $2p$ eine Verlängerung $2\triangle l$ und allgemein einer Zugkraft np eine Verlängerung $n\triangle l$. Diese Erwägung führt zur Frage, was für eine Zugkraft E wohl erforderlich wäre, um den belasteten Körper auf seine doppelte Länge $2l$ auszu-

*) Einen zur optischen Darstellung dieser Figuren vorzüglich geeigneten einfachen Spiegelapparat hat Pfaundler construirt.

dehnen, unter der in Wirklichkeit freilich niemals zutreffenden Voraussetzung, dass eine solche Verlängerung die Elasticitätsgrenze*) (so nennt man die dem Elasticitätsgrenzgewichte entsprechende Ausdehnung) nicht überschreiten würde. Offenbar würde in diesem Falle aus dem Elasticitätsgesetze die Beziehung folgen $E : l = p : \triangle l$ also

$$E = \frac{p}{\Delta l} \cdot l \quad \quad 40)$$

Die so definirte Grösse E ist es nun, die man Elasticitätsmodul heisst. Sie findet viele wichtige Anwendungen.

Zunächst ist ersichtlich, dass man den Elasticitätsmodul findet, wenn man bei den beschriebenen Belastungsversuchen, mit einem elastischen Körper von der Länge l zusammengehörige Werthe von p und $\triangle l$ ermittelt. Ist auf diese Art der Werth von E bestimmt, so kann nicht nur für den betrachteten Körper vom Querschnitte 1 die jeder beliebigen Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze entsprechende Verlängerung berechnet werden, sondern auch die unter Voraussetzung eines anderen Querschnittes q sich ergebende. Für den Querschnitt 1 hat man nämlich

$$p = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad \quad 41)$$

Ist der Querschnitt q, so wird, um dieselbe Verlängerung $\triangle l$ zu bewirken, offenbar eine Belastung

$$p' = q \cdot p = qE \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad \quad 42)$$

erforderlich sein.

Zur Erläuterung des Gesagten mag noch folgendes Beispiel dienen. Man denke sich einen Eisenstab von der Länge l und vom Querschnitte q um t^0 erwärmt, so wird eine Ausdehnung erfolgen vom Betrage $\triangle l = \alpha t l$, wenn α den Ausdehnungscoëfficienten (für 1^0) vorstellt. Lässt man den Stab sich wieder abkühlen, so wird er sich dabei mit einer gewissen Kraft k zusammenziehen und diese Kraft wird dieselbe sein, welche als Zugkraft angewendet werden müsste, um denselben Stab um den Betrag $\triangle l$ auszudehnen. Wir erhalten daher nach Formel 42 die Beziehung

$$k = qE \cdot \alpha t \text{**)} \quad \quad 43)$$

*) Manche Autoren nennen das, was wir Elasticitätsgrösse genannt haben, Elasticitätsgrenze und umgekehrt.

**) Zahlenbeispiel. Denken wir uns einen Eisenstab vom Querschnitte $q = 5^{\square cm.}$ (die Länge kommt hier, da sie aus der Rechnung fällt, nicht

Es mag bei dieser Gelegenheit daran erinnert werden, dass das Verfahren, durch welches nach dem Vorschlage von Molard die auseinandergewichenen Mauern des Conservatoire des arts et métiers in Paris gerade gerichtet wurden, eine sinnreiche Anwendung dieses Principes war.

Der Elasticitätsmodul eines Materials steht in einem bemerkenswerthen Zusammenhange mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in diesem Material. Man findet nämlich für diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{g.E}{s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

und kann somit den Werth von E auch auf akustischem Wege ermitteln, insofern man über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c Aufschluss erhält. Dazu dient beispielsweise die Beobachtung der Höhe, d. i. Schwingungszahl n des Longitudinaltones eines Stabes von der Länge l (der Querschnitt kommt hier nicht in Betracht) vom betreffenden Materiale. Die Akustik lehrt nämlich, dass

$$n = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g.E}{s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

woraus sich E sofort ergibt, wenn die Acceleration der Schwere, g, und das specifische Gewicht, s, des Materials bekannt sind.

(**Hindernisse der Bewegung.**) Wir wollen den nachfolgenden Erörterungen über den Begriff der mechanischen Arbeit einige Bemerkungen über die dabei wesentlich in Betracht kommenden Widerstände vorausschicken. Diese Widerstände sind von zweifacher Art, insofern wir sogenannte Reibungswiderstände und Widerstände eines flüssigen Mediums (Luft, Wasser u. dergl.), in welchem die Bewegung des betrachteten Körpers stattfinden mag, zu unterscheiden pflegen. Man begreift die Widerstände der letzteren Art unter dem Ausdrucke: Widerstände des Mittels. Ueber beide wird schon in den Anfangsgründen der Physik das Wichtigste gelehrt, wesshalb wir uns hier auf einige Ergänzungen des bereits Bekannten

in Betracht) z. B. um 100° erwärmt und fragen wir nach der Kraft k in Kilogrammen, mit welcher sich dieser Stab bei der Abkühlung zusammenzieht, so ergibt sich folgende einfache Rechnung. Der Ausdehnungscoëfficient des Eisens ist sehr nahe $= 0{,}00012 = 12 . 10^{-6}$; der Elasticitätsmodulus für 1 □cm. Querschnitt beträgt bei der angegebenen Temperatur sehr nahe $2000000 = 2 . 10^6$ Kilo; wir erhalten also $k = 5 . 2 . 10^6 . 12 . 10^{-6} . 100 = 5 . 2 . 12 . 100 = 12000$ Kilo.

beschränken können. Vor Allem soll der Begriff des sogenannten Reibungscoëfficienten in Erinnerung gebracht werden. Wenn ein Körper vom Gewichte Q (Fig. 54) auf einer horizontalen Unterlage HR ruht, so wird eine gewisse horizontal wirkende Zugkraft P, die wir uns z. B. mittelst Schnur und Rolle durch ein Gewicht hervorgebracht denken können, erforderlich sein, um diesen Körper mit Ueberwindung der Reibungswiderstände (es handelt sich im vorliegenden Falle um die sogenannte gleitende Reibung, im Gegensatze zur sogenannten wälzenden Reibung bei einer rollenden Bewegung) aus der Ruhe in die Bewegung überzuführen. Diese Zugkraft P wird einen aliquoten Theil des Gewichtes Q ausmachen; ist z. B. $P = \varrho \cdot Q$, also

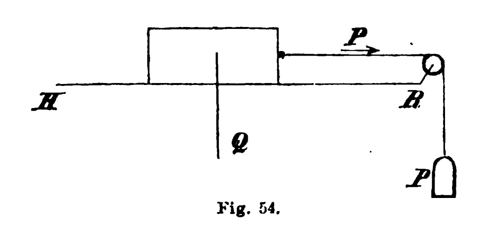


Fig. 54.

$$\varrho = \frac{P}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 46)$$

so nennt man die so ermittelte Grösse ϱ den Reibungscoëfficienten. Es soll hier gelegentlich bemerkt werden, dass dieser Reibungscoëfficient durch ein sehr einfaches und elegantes Verfahren mit Hilfe einer schiefen Ebene (Fig. 55) in folgender Weise ermittelt werden kann. Wir führen das Verfahren an, um damit zugleich den Begriff des Reibungscoëfficienten an einem Beispiele noch besser zu erläutern. Es befinde sich derselbe Körper, den wir vorhin betrachtet haben, auf einer schiefen Ebene RT von der Neigung α, in welchem Falle die Componente $P = Q \cdot \sin\alpha$ seines Totalgewichtes als „relative Schwere" parallel der schiefen Ebene wirksam sein wird, während im vorliegenden Falle nicht mehr das Gewicht des Körpers selbst, sondern die Componente $Q \cdot \cos\alpha$ desselben als

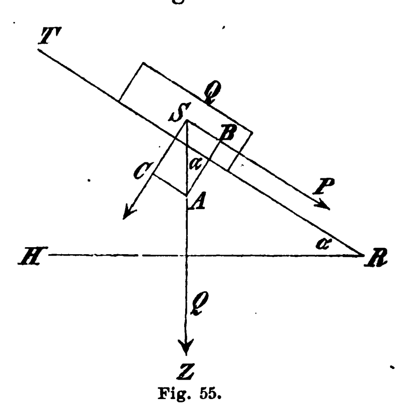


Fig. 55.

Normaldruck gegen die Unterlage RT zur Geltung kommt. Richten wir nun die Neigung der schiefen Ebene so ein, dass das Abgleiten des Körpers beginnt, so haben wir im Wesentlichen denselben Versuch gemacht, als wenn wir ein auf horizontaler Ebene liegendes Gewicht $Q \cdot \cos\alpha$ durch einen Zug vom Betrage $Q \cdot \sin\alpha$ in Bewegung gesetzt hätten. Wir haben daher

nach Formel 46 . . . . $\varrho = \frac{Q \cdot \sin\alpha}{Q \cdot \cos\alpha}$,

also $\varrho = \operatorname{tg}\alpha$ . . . . 47)

als Ausdruck für den Reibungscoëfficienten. Diesen Winkel, dessen Tangente also den Reibungscoëfficienten darstellt, hat man Reibungswinkel oder auch Gleitwinkel genannt. Ist umgekehrt der Reibungscoëfficient bereits bekannt, so kann daraus sofort der Gleitwinkel berechnet werden, und es findet das Gesagte natürlich auch Anwendung auf die wälzende Reibung, wenn nur der betreffende numerische Werth des Reibungscoëfficienten gehörig in Rechnung gebracht wird. Dieser ist, wie bekannt, bei der wälzenden Reibung im Vergleiche mit der gleitenden sehr klein. Während man z. B. für die gleitende Reibung von Metall auf Metall (ohne Schmiermittel) etwa 0,18 rechnet, beträgt die wälzende Reibung auf Eisenbahnen etwa 0,005, woraus sich der Gleitwinkel, also die Steigung, bei welcher ein nicht gebremster Wagen abzurollen beginnt, nach obiger Formel leicht berechnen lässt.

Hinsichtlich des Mittelwiderstandes wollen wir nur kurz erwähnen, dass derselbe, wie leicht einzusehen, eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Von besonderer Wichtigkeit für viele physikalische Probleme ist namentlich der Luftwiderstand. Um denselben in Rechnung bringen zu können (wie es z. B. auch bei genauen Pendelbeobachtungen geschehen soll), muss man eben die Abhängigkeit dieses Widerstandes von der Geschwindigkeit wissen, eine Abhängigkeit, welche noch nicht genauer erforscht ist. Man pflegt anzunehmen, dass bei geringen Geschwindigkeiten der Luftwiderstand mit der ersten Potenz, bei grossen Geschwindigkeiten mit der zweiten Potenz der Geschwindigkeit nahezu proportional sei. Die erstere Annahme wäre z. B. bei Pendelbewegungen, die letztere beim freien Falle statthaft. Bemerkenswerth ist noch, dass bei der Bewegung durch widerstehende Mittel grosse Körper im Vergleiche mit kleinen im Vortheil sind, indem die grösseren Körper im Verhältnisse zu

ihrer Masse eine kleinere Querschnittsfläche darbieten, wie sich dies z. B. für zwei Kugeln von verschiedenem Radius durch eine sehr einfache Rechnung herausstellt, indem bei gleichem Material das Gewicht der dritten, der Querschnitt der zweiten Potenz des Radius proportional ist; daher wird z. B. für einen pulverförmigen Körper der Widerstand des Mittels verhältnissmässig sehr gross, woraus sich z. B. das langsame Niedersinken eines pulverförmigen Körpers selbst von viel grösserem specifischem Gewichte in einer Flüssigkeit erklärt.

(**Arbeit; lebendige Kraft.**) Wenn eine Kraft einen gewissen Widerstand überwindet, so verrichtet sie Arbeit. Denken wir uns den Widerstand durch den Betrag der Kraft gemessen, welche zu seiner Ueberwindung eben erforderlich ist, so bietet sich das Produkt dieser Widerstandsgrösse mit der Bahnstrecke, längs welcher der Widerstand überwunden worden ist, vorausgesetzt, dass der Widerstand sich dabei nicht geändert hat,*) als natürliches Mass der Arbeitsgrösse dar. Ist also z. B. R der constante Widerstand und s der Weg, auf welchem derselbe überwunden worden ist, so stellt Rs die Grösse der verrichteten Arbeit vor. Denkt man sich den Widerstand in Gewichtseinheiten ausgedrückt, so kann jede Arbeit vorgestellt werden durch die Hebung eines Gewichtes von der Grösse des Widerstandes R auf die Höhe s, welche der bei der betrachteten Arbeit zurückgelegten Weglänge entspricht. Es ist aber auch klar, dass dieselbe Arbeit auch vorgestellt werden kann durch die Hebung eines anderen Gewichtes P auf eine andere Höhe h, insofern nur die Relation festgehalten wird: $Rs = Ph$, da es bei der Messung des Arbeitswerthes eben nur auf das Produkt der beiden vorgenannten Faktoren, nicht aber einzeln genommen auf deren Grösse ankommt. Damit ist nicht gesagt, dass dies auch für die praktische Verwerthung eines gewissen Arbeitsvorrathes Geltung hat, wobei es allerdings bald wünschenswerth erscheint, den ersten Faktor auf Kosten des zweiten, bald den zweiten auf Kosten des erstern zu vergrössern, indem es sich z. B. das eine Mal darum handeln kann, einen möglichst grossen Druck, wenn auch mit geringer Bewegungsgeschwindigkeit, auszuüben, ein andermal dagegen eine möglichst grosse Bewegungsgeschwindigkeit, wenn auch nur unter

*) Im entgegengesetzten Falle hat eine Integration einzutreten, wie später erläutert werden wird.

Ausübung eines geringen Druckes, zu erzeugen. (Ersteres findet z. B. bei einer hydraulischen Presse, letzteres bei einer Circularsäge statt.) Auch in anderer Beziehung ist bei der praktischen Verwerthung der Arbeit das Grössenverhältniss der einzelnen Faktoren nicht gleichgiltig, da es für jeden Motor eine gewisse vortheilhafteste Geschwindigkeit gibt, indem er eben bei einem gewissen Verhältnisse zwischen Druck und Bewegungsgeschwindigkeit den grössten Wirkungsgrad liefert. Aehnliches gilt auch von Arbeitern, sowie auch von Arbeitsthieren.

Die übliche Einheit zur Messung der Arbeitsgrössen ist bekanntlich das Kilogrammmeter entsprechend der Hebung eines Kilogramms auf die Höhe eines Meters.

Bei der praktischen Arbeitsverwerthung kommt aber auch die Zeit in Betracht, während welcher eine gewisse Arbeit verrichtet wird und man hat aus diesem Gesichtspunkte die sogenannte Pferdekraft als Einheit eingeführt, welche in jeder Sekunde 75 Kilogrammmeter Arbeit liefert.

Bei diesen Betrachtungen haben wir uns vorgestellt, dass die Arbeit in der Ueberwindung von Bewegungshindernissen (Reibungswiderstand und Mittelwiderstand) bestehe. Eine Kraft verrichtet aber auch Arbeit, indem sie lediglich einer bestimmten Masse eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt, denn sie ertheilt ihr ja damit „lebendige Kraft", die bekanntlich einem bestimmten Arbeitswerthe äquivalent ist. In der That, wenn wir der Masse von m Litern Wasser die Geschwindigkeit von c Metern ertheilen, so besitzt dieselbe in Folge dessen einen Arbeitsvorrath von $\frac{m \cdot c^2}{2g}$ Kilogrammmetern. Eben diese Arbeit hat die Kraft hervorgebracht, welche jener Masse die besagte Geschwindigkeit ertheilte. In einem solchen Falle ist die Trägheit der Materie (von Newton vis inertiae, d. i. Kraft der Trägheit, genannt) gewissermassen der Widerstand, um dessen Ueberwindung es sich handelt. Wir können denselben Trägheitswiderstand (i) nennen und $m \cdot \frac{dv}{dt}$ als den Betrag ansehen, mit welchem er sich geltend macht, wenn die Masse m innerhalb des Zeitdifferentials dt den Geschwindigkeitszuwachs dv erlangen soll, so dass wir schreiben können

$$i = m \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Es ist dies natürlich derselbe Druck (Beschleunigungsdruck), welcher der beschleunigenden Kraft entspricht, die zur Hervorbringung der besagten Wirkung erforderlich ist. Denken wir uns nun den in der Curve MM' (Fig. 56) beweglichen materiellen Punkt m als Angriffspunkt einer Kraft R, deren tangentielle Componente $S = R\cos\varphi$ sei. Diese letztere ist nun in dem betrachteten Zeitelemente dt als beschleunigender Druck wirksam, während das Bewegliche das Wegelement ds zurücklegt und dabei den Geschwindigkeitszuwachs dv verlangt.

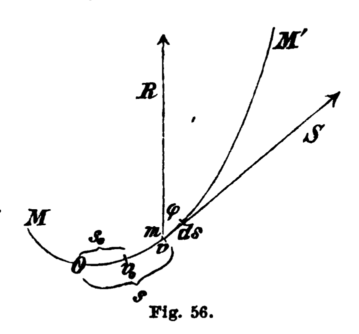


Fig. 56.

Nach dem Vorhergehenden (siehe die Bemerkung nach Formel 48) muss nun offenbar $m\frac{dv}{dt} = S$ sein. Da nun andererseits nach den Grundformeln der Bewegung (siehe Formel 1) $v \cdot dt = ds$, so folgt durch beiderseitige Multiplikation $mvdv = Sds$. Dieser Ausdruck stellt augenscheinlich das längs des Bahnelementes ds verrichtete Arbeitselement vor. Um nun die Gesammtarbeit für eine endliche Strecke $s - s_0$ zu finden, müssen wir hier, da die arbeitende Kraft veränderlich ist, eine Integration vornehmen, bei der wir erhalten:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} S\,ds = \int_{s_0}^{s} R\cos\varphi\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

wobei v die Endgeschwindigkeit in dem zuletzt betrachteten Augenblicke (nach Zurücklegung des Weges s von O aus) bedeutet und v_0 die Geschwindigkeit in einem früheren Zeitpunkte (nach Zurücklegung des Weges s_0 von O aus), von welchem angefangen wir die Bewegung in's Auge fassen. Betrachten wir den Vorgang von einem Zeitpunkte angefangen, in welchem $v_0 = 0$ gewesen ist, so erscheint dann $\frac{mv^2}{2}$ als Werth der Arbeit, welche nöthig war, um der Masse m die Geschwindigkeit v beizubringen.*) Man nennt diesen Arbeitswerth **lebendige Kraft**, weil er zugleich die Arbeit vorstellt, welche die gegebene Masse m auf Kosten ihrer Geschwindigkeit v wieder zu leisten fähig ist. Würde man in

*) Beziehungsweise $\frac{mv^2}{2g}$ · Siehe den folgenden §.

der That die vorhin betrachtete Bewegung umkehren, in der Art, dass man der Masse m des Beweglichen die erlangte Geschwindigkeit v in entgegengesetzter Richtung ertheilte, so würde die früher beschleunigende Kraftcomponente $S = R \cos \varphi$ nunmehr als eine verzögernde wirken und somit als ein Widerstand in Betracht kommen, welcher eine Arbeitsleistung von Seite der Masse m erheischt, wenn diese den vorhin beschriebenen Weg, auf welchem sie die Geschwindigkeitszunahme von v_0 auf v erfuhr, in entgegengesetzter Richtung zurücklegen soll, eine Arbeitsleistung, welche*) für die Strecke $s - s_0$ offenbar wieder den numerischen Werth $\int_{s_0}^{s} S\,ds = \frac{mv^2}{2} - \frac{m\,v_0^2}{2}$ haben und daher den vorhin betrachteten Zuwachs an Geschwindigkeit und lebendiger Kraft wieder aufzehren wird. Wird die Geschwindigkeit auf Null gebracht, so wird, wegen $v_0 = 0$, $\frac{mv^2}{2} = \int_{s_0}^{s} S ds$. Es stellt demnach $\frac{mv^2}{2}$ in der That genau die ganze Arbeit vor, welche die Masse m vermöge ihrer Geschwindigkeit v, indem sie dieselbe wieder verliert, zu leisten vermag. Man kann daher die lebendige Kraft auch als das **Arbeitsvermögen** definiren, welches eine gegebene Masse vermöge ihrer Geschwindigkeit besitzt.

Man kann den zuletzt beschriebenen Vorgang auch so ansehen, dass die Kraft R, welche nunmehr mit der Bewegungsrichtung den Winkel $\pi - \varphi$ bildet, also beziehungsweise die Componente $-R \cos \varphi = -S$, die Arbeit $\int_{s}^{s_0} - S\,(-ds) = - \int_{s_0}^{s} S ds$, also eine negative (d.i. lebendige Kraft **verbrauchende**) Arbeit von numerisch gleichem Betrage wie vorhin verrichtet. Projiciren wir das Wegelement ds auf die Richtung der Kraft R (von welcher S eben nur eine Componente ist), so erhalten wir $ds \cos \varphi$ als die in die Kraftrichtung fallende Verschiebung des Angriffspunktes während des Zeitdifferentials dt und somit $Rds \cos \varphi$ als entsprechende Arbeit der Kraft R. Wenn das auf eine Kraftrichtung projicirte Bahnelement des Angriffspunktes, wie im ersten Falle, mit der Kraftrichtung einen spitzen Winkel bildet, so dass die Projektion mit der Kraft

*) Abgesehen vom Vorzeichen.

gleichgerichtet erscheint, oder mit andern Worten die Verschiebung des Angriffspunktes im Sinne der Kraft erfolgt, nennt man die Arbeit der Kraft **positive Arbeit** (travail moteur), im entgegengesetzten zweiten Falle **negative Arbeit** (travail résistant).

Formel 49 ist der Ausdruck des sogenannten **Princips der lebendigen Kraft**, auf dessen wichtige Anwendungen wir in der Potentialtheorie zurückkommen werden.

(Beziehung zwischen den Ausdrücken $\frac{mv^2}{2}$ und $\frac{mv^2}{2g}$.) Bei theoretischen Betrachtungen pflegt man bekanntlich als Einheit der beschleunigenden Kräfte eine Kraft anzusehen, welche, wenn sie constant wäre, der Masseneinheit (1 Liter Wasser) in der Zeiteinheit (1 Sekunde) die Längeneinheit (1 Meter) als Geschwindigkeitszuwachs, d. i. Beschleunigung ertheilen würde. Auf diese Einheit bezogen wird man die Zugkraft eines Gewichtes von der Masse m offenbar durch $m . 9{,}81 = mg$ ausdrücken müssen, weil ja die Acceleration der Schwere $9{,}81 = g$ Längeneinheiten beträgt. Dagegen pflegt man bei praktischen Anwendungen als Einheit für die beschleunigenden Kräfte das Kilogramm zu wählen, also eine Kraft, welche der Masseneinheit nicht die Längeneinheit, sondern die $g$fache Längeneinheit (9,81) als Beschleunigung ertheilt. Auf diese grössere Einheit bezogen, wird man also die Zugkraft eines Gewichtes von der Masse m durch eine $g$mal kleinere Zahl, also nicht mehr durch mg wie früher, sondern durch $\frac{mg}{g} = m$ ausdrücken müssen, so dass das Gewicht einer Masse, als Zugkraft gemessen, durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird wie die Masse selbst. Hieraus ist klar, dass jeder auf die theoretische Einheit bezogene Ausdruck einer Kraft beim Uebergange auf die Gewichtseinheit durch g dividirt werden muss. Fassen wir nun den Ausdruck für eine Arbeitsgrösse ins Auge, so erscheint in demselben der Ausdruck für eine Kraft (beziehungsweise einen Widerstand) als Faktor, und da eben dieser Faktor beim Uebergange von der ersten Einheit auf die zweite durch g zu dividiren kommt, so folgt daraus, dass auch der Ausdruck für eine Arbeitsgrösse, wenn man von der theoretischen Einheit auf die Gewichtseinheit übergeht, durch g dividirt werden muss. Da endlich der Ausdruck für eine lebendige Kraft, wie wir gesehen

haben, zugleich der Ausdruck für die äquivalente Arbeitsgrösse ist, so gilt das Gesagte auch für die Umrechnung der lebendigen Kräfte von der einen Einheit auf die andere und es wird die lebendige Kraft der mit der Geschwindigkeit v begabten Masse m auf die erste Einheit bezogen durch $\frac{mv^2}{2}$, auf die zweite Einheit bezogen durch $\frac{mv^2}{2g}$ dargestellt werden.

Dass man aber, auf die theoretische Einheit bezogen, die lebendige Kraft mit Recht durch $\frac{mv^2}{2}$ statt durch mv^2, wie es früher üblich war, ausdrückt, lässt sich beispielsweise auch durch folgende Erwägung sehr anschaulich machen. Man denke sich die Masse m mit der Geschwindigkeit v aufwärts geworfen, so wird ihre Geschwindigkeit $= 0$ werden, sobald sie die sogenannte Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ erreicht hat. Auf diesem vertikalen Wege hat die Masse die Zugkraft ihres eigenen Gewichtes als Widerstand überwunden, welche auf die theoretische Einheit bezogen nach dem Gesagten $= mg$ ist, somit die Arbeit $mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2}$ verrichtet, als Aequivalent ihrer dabei verbrauchten lebendigen Kraft, welche daher ganz richtig auch durch $\frac{mv^2}{2}$ dargestellt wird.

(**Erhaltung der Kraft.**) Mit diesem Ausdrucke oder besser mit dem Ausdrucke: Erhaltung der Arbeit bezeichnet man ein allgemeines mechanisches Gesetz, dessen Sinn im Nachstehenden erläutert werden soll.

Wenn ein Gewicht von P Kilogrammen in der Höhe $AO = H$ über der Erdoberfläche sich befindet, so stellt es mit Rücksicht auf seine Hubhöhe einen gewissen Arbeitsvorrath PH Kilogrammmeter vor, eben diese Arbeit, welche erforderlich war, das Gewicht P auf die Höhe H zu bringen, kann es nämlich wieder abgeben oder verrichten, indem es zur Erdoberfläche zurückgelangt. Dies kann nun entweder in der Art geschehen, dass das Gewicht die Höhe H im freien Falle zurücklegt, wodurch es eine gewisse lebendige Kraft $\frac{PV^2}{2g} = PH$ erlangt, oder

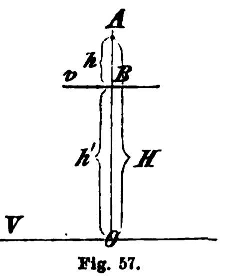


Fig. 57.

indem es Widerstände überwindend ohne Beschleunigung sinkt und dabei dieselbe Arbeit PH verrichtet, oder endlich, indem theils das eine, theils das andere geschieht. Denken wir uns nun beispielsweise, das Gewicht hätte die Höhe $AB = h$ im freien Falle zurückgelegt und dabei die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ erlangt, so besitzt es, im Punkte B angelangt, einerseits die lebendige Kraft $\frac{Pv^2}{2g} = Ph$ und andererseits noch das Vermögen, beim weiteren Sinken durch die Höhe $BO = h'$ in der einen oder anderen Weise noch die Arbeit Ph' zu verrichten. Diese beiden Arbeitswerthe, der Punkt B mag wo immer zwischen A und O angenommen werden, geben stets die Summe

$$Ph + Ph' = P(h + h') = PH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 50)$$

Man nennt den ersten Theil dieses Arbeitsvorrathes, welcher lebendige Kraft ist, aktuelle Energie; den zweiten Theil, nämlich den vermöge der noch verfügbaren Hubhöhe dem Gewichte noch innewohnenden Arbeitsvorrath: potentielle Energie, oder Energie der Lage, oder auch Spannkraft. Die Summe der aktuellen und potentiellen Energie, welche man auch totale Energie nennt, ist eine constante Grösse und darin besteht der Satz von der Erhaltung der Arbeit. — Es folgt daraus, dass in dem Masse potentielle Energie verbraucht wird, in welchem lebendige Kraft erzeugt wird, und umgekehrt; denn denken wir uns das betrachtete Gewicht von B aus, wo es die lebendige Kraft $\frac{Pv^2}{2g}$ hat, mit der Geschwindigkeit v nach aufwärts geworfen, so wird diese lebendige Kraft vollends verbraucht, bis die entsprechende Hubhöhe $h = \frac{v^2}{2g}$ wieder erreicht ist. Dieses Theorem beruht also auf der im vorhergehenden §. bereits erörterten Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit, und es kann insofern auch Formel 49 als mathematischer Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Arbeit angesehen werden, was bei einer späteren Gelegenheit noch eingehender erläutert werden soll. Dieser Satz drückt unter Anderem auch die Unmöglickeit eines sogenannten perpetuum mobile aus, die Unmöglichkeit nämlich, mit einem endlichen Arbeitsaufwande ins Unendliche fort lebendige Kraft hervorzubringen oder umgekehrt, und in dieser Form war man sich der physikalischen Wahrheit, welche in dem

Satze von der Erhaltung der Kraft niedergelegt ist, wohl schon längst mehr oder weniger klar bewusst.*)

Die vorhin angeführten Beispiele lassen sich leicht verallgemeinern. Denken wir uns (Fig. 58) eine Masse = 1 im Abstande x von der Erde, deren Masse Q heissen soll, so wird die Masse mit der Kraft $\frac{Q}{x^2}$ angezogen und es muss die Arbeit $\frac{Q}{x^2} \cdot dx$ verrichtet werden, um diese Masse um das Wegelement dx von der Erde zu entfernen. Wollte man die Masse von der Oberfläche A bis in den unendlichen Raum der Anziehungskraft der Erde entziehen, so wäre dazu die Arbeit $\int_r^\infty \frac{Q}{x^2} dx = \frac{Q}{r}$, wobei r den Erdradius bedeutet, erforderlich. Die Masse 1 besitzt also in unendlich grosser Entfernung von der Erde die potentielle Energie $\frac{Q}{r}$, d. h. sie ist, der Anziehung der Erde folgend, befähigt, auf dem Wege bis zur Erdoberfläche eine Arbeit von gleichem Betrage $\frac{Q}{r}$ zu verrichten. Hat sie sich der Erde bis auf die Entfernung x genähert, so besitzt sie, wie sich ebenso leicht zeigen lässt, nur mehr die potentielle Energie $Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)$, der Rest $\frac{Q}{x}$ ist in lebendige Kraft verwandelt worden und gibt mit der gleichzeitig vorhandenen potentiellen Energie allerorten stets die gleiche Summe $\frac{Q}{r}$.

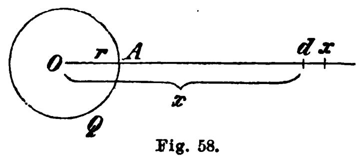


Fig. 58.

Die Natur bietet uns die verschiedenartigsten und grossartigsten Beispiele von Umsetzungen der aktuellen und potentiellen Energie. Solchen unterliegt z. B. auch die Erde auf ihrem Wege um die Sonne. Die dem Quadrate des Perpendikels aus dem Centralpunkte auf die Tangente verkehrt proportionale lebendige Kraft**) wächst (Fig. 59) auf dem Wege von E_1 nach E_2, während gleichzeitig die Entfernung der Erde von der Sonne und somit auch die potentielle Energie abnimmt; das

*) Siehe: Mach, Geschichte des Satzes von der Erhaltung der Arbeit.

**) Folgt aus dem allgemeinen Gesetze der Centralbewegung (zweites Keppler'sches Gesetz, Gesetz der Flächen).

Umgekehrte geschieht auf dem Wege aus einer kleineren Entfernung von der Sonne in eine grössere.

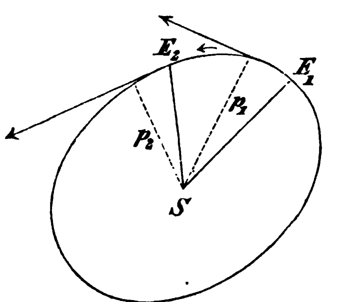


Fig. 59.

Bei chemischen Verbindungen wird durch die Annäherung der Atome potentielle Energie verbraucht, dafür aktuelle Energie (Wärme) entwickelt; bei der Bildung der Holzfaser durch Vermittelung der unter Einfluss des Sonnenlichtes erfolgten Zerlegung der Kohlensäure der Luft ist umgekehrt die aktuelle Energie des Lichtes in potentielle Energie, entsprechend der Trennung der Atome, verwandelt worden. Unermessliche Arbeitsvorräthe dieser Art sind gewissermassen in unsern Kohlenlagern angesammelt und bei Verbrennung der Kohle wird die bei ihrer Bildung vollzogene Verwandlung der aktuellen in potentielle Energie unter Licht- und Wärme-Entwickelung wieder rückgängig gemacht.

(Princip der virtuellen Bewegungen.) Wenn gegebene Punkte A_1, A_2 ...., die wir uns als Angriffspunkte von Kräften denken wollen, mittelst irgend einer Vorrichtung (Fig. 60) in solche Verhältnisse gebracht sind, dass sie den auf sie wirkenden Kräften P_1, P_2 .... nicht frei folgen können, so bilden sie ein System von Punkten, deren Bewegungen, wie man zu sagen pflegt, durch gewisse Bedingungen beschränkt sind. Diese Beschränkungen haben zur Folge, dass jene Punkte im Allgemeinen nicht nach jeder Richtung hin verschiebbar sein werden. So kann z. B. A_1 nicht normal gegen die schiefe Ebene hin verschoben werden. Bezüglich der möglichen Verschiebungen aber müssen wir von vornherein

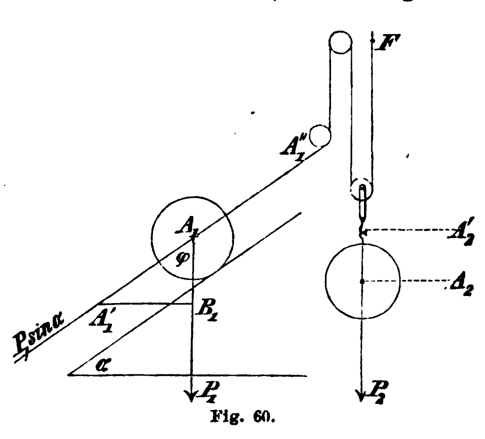


Fig. 60.

unterscheiden, ob diese möglichen Verschiebungen auch alle in entgegengesetztem Sinne ausführbar sind oder nicht. Erstere nennen wir umkehrbare, letztere nicht umkehrbare Bewegungen. So sind z. B. die Bewegungen von A_1 längs der schiefen Ebene umkehrbar, normal zur schiefen Ebene nicht umkehrbar, da der Körper in dieser Richtung wohl von der schiefen Ebene entfernt, nicht aber in entgegengesetztem Sinne verrückt werden kann. Die in einem Falle der letzteren Art in Betracht kommenden Bewegungshindernisse nennt man Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande.

Wir wollen unsere Erörterungen von vornherein auf umkehrbare Bewegungen beschränken. Eine solche führen wir aus, wenn wir den Angriffspunkt A_1 z. B. nach A_1' verschieben, in welchem Falle gleichzeitig der Angriffspunkt A_2 nach A_2' gehoben werden wird. Projiciren wir diese Verschiebungen auf die Kraftrichtungen, so erhalten wir einerseits die in die Kraftrichtung P_1 fallende Verschiebung $A_1 B_1$, andrerseits $A_2 A_2'$. Die als unendlich klein angenommenen mit den beschränkenden Bedingungen, die theils durch die gegenseitige Verbindung der Angriffspunkte, theils durch Linien oder Flächen, an welchen sie gleiten müssen, gegeben sind, vereinbaren Verschiebungen nennt man virtuelle Bewegungen (man nennt sie auch virtuelle Geschwindigkeiten). Die Projektionen dieser virtuellen Bewegungen auf die bezüglichen Kraftrichtungen, multiplicirt mit den betreffenden Kräften, oder, was dasselbe ist, die Produkte der virtuellen Bewegungen selbst mit den in ihre Richtung fallenden Kraftcomponenten heissen virtuelle Momente und zwar positive oder negative, jenachdem die Projektionen mit der Kraftrichtung gleich gerichtet sind wie bei $A_1 A_1'$ bezüglich P_1, oder entgegengesetzt erscheinen (wie es bei P_1 im Falle einer Verschiebung nach A_1'' der Fall wäre). Ist P die betrachtete Kraft, δs die virtuelle Verschiebung ihres Angriffspunktes und φ der Winkel der beiden Richtungen, so ist $P \cos \varphi \delta s = P \delta p$ das sogenannte virtuelle Moment der Kraft P, welches, insofern $P \cos \varphi$ innerhalb der Verschiebung δs als constant angesehen werden darf*), auch virtuelle Arbeit genannt werden kann und genannt zu werden pflegt. Vermöge der unter den Punkten bestehenden Verbindungen wird eine

*) Bezüglich dieser Bemerkung siehe Clausius, Potentialfunction, 2. Aufl. S. 91.

jede virtuelle Verschiebung eines Punktes im Allgemeinen auch den übrigen Punkten virtuelle Bewegungen ertheilen und jede an einem dieser Punkte angebrachte Kraft auch auf die andern Punkte wirken, so als ob jeder Punkt auf jeden andern einwirkte. Im Falle des Gleichgewichtes müssen also die an jedem Punkte direkt angreifenden und vermöge der Anordnung des Systems von den übrigen Punkten her auf diesen übertragenen Kräfte einander das Gleichgewicht halten. Denkt man sich nun das System der Angriffspunkte thatsächlich im Gleichgewichte und eine virtuelle Verrückung der Angriffspunkte (z. B. durch eine virtuelle Bewegung eines derselben) eingeleitet, so besteht das Princip der virtuellen Bewegungen darin, dass es für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend ist, dass die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte = 0 sei, vorausgesetzt, dass die eingeleiteten virtuellen, das heisst mit den oben näher bezeichneten beschränkenden Bedingungen für das System der Angriffspunkte vereinbaren Bewegungen umkehrbar sind.

Mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen wäre also der mathematische Ausdruck dieses Satzes folgender:

$$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \cdots = \Sigma P \delta p = 0 \quad . \quad . \quad 51)$$

was mit Rücksicht auf die bereis erörterte Relation

$$\delta p = \delta s \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 52)$$

mit

$$P_1 \cos\varphi_1 \delta s_1 + P_2 \cos\varphi_2 \delta s_2 + P_3 \cos\varphi_3 \delta s_3 + \cdots = \Sigma P \cos\varphi\, \delta s = 0 \quad 53)$$

gleichbedeutend ist.

Denkt man sich den Angriffspunkt von P auf ein dreiaxiges rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen und die den drei Axen parallelen Komponenten von P mit X, Y und Z bezeichnet, so sind $\frac{X}{P}$, $\frac{Y}{P}$ und $\frac{Z}{P}$ offenbar die Cosinus der Winkel α, β und γ, welche P mit den drei Axen bildet (da eben $X = P \cos \alpha$ u. s. w.); ebenso sind $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$ und $\frac{\delta z}{\delta s}$ die Cosinus der Winkel α', β', γ', welche die Verschiebung δs mit den drei Axen bildet, wenn man ihre den Axen parallelen Componenten mit δx, δy und δz bezeichnet, wobei x, y und z die Koordinaten des Angriffspunktes sind. — Da nach einem be-

kannten Lehrsatze der analytischen Geometrie der Cosinus des Winkels, welchen P und δs miteinander bilden, nämlich

$$\cos \widehat{P\delta s} = \cos \varphi = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' =$$

$$= \frac{X}{P} \cdot \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{P} \cdot \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{P} \cdot \frac{\delta z}{\delta s}$$

also

$$P \cos \varphi \delta s = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54)$$

so kann man auch schreiben

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

Trifft die hier festgehaltene Annahme der Umkehrbarkeit der virtuellen Bewegungen nicht zu, so gilt der Satz

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\overline{<}} 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Dieser Satz (51,55) würde an sich klar sein, wenn wir es mit einem System von frei beweglichen Punkten zu thun hätten, deren jeder von Kräften beherrscht ist, die sich eben das Gleichgewicht halten. In diesem Falle wäre nämlich die bei einer Verrückung der Punkte verrichtete Gesammtarbeit aller Kräfte aus dem einfachen Grunde $= 0$, weil ja für jeden einzelnen Punkt die Arbeit der auf ihn wirkenden Kräfte gleich Null wäre, indem unserer Annahme gemäss die Resultirende dieser Kräfte für jeden Punkt Null ist und deren Arbeit der Summe der Arbeiten der Componenten gleichkommt. Wir können nun aber auch jedes System von Angriffspunkten, deren Bewegungen gewissen Beschränkungen unterworfen sind, in einem gewissen Sinne wie ein System von freien Angriffspunkten ansehen, was aus folgender Betrachtung erhellen dürfte.

Die beschränkenden Bedingungen, welchen die einzelnen Angriffspunkte unterliegen, lassen sich nämlich auf zweifache Weise darstellen. Wir können sie entweder darstellen durch gewisse Bedingungsgleichungen, welchen die Coordinaten der betreffenden Angriffspunkte genügen müssen, wodurch diese Angriffspunkte in ihren Bewegungen auf gewisse geometrische Oerter, d. i. Linien oder Flächen, beschränkt und den sonst durch die gegenseitige Verbindung der Angriffspunkte vorgezeichneten Bedingungen zu entsprechen genöthigt werden, oder aber wir können uns die beschränkenden Bedingungen in der Weise hergestellt denken, dass wir Kräfte annehmen,

welche das System nöthigen, den betreffenden Bedingungen zu genügen, wie z. B. Kräfte, mit welchen jene Linien oder Flächen, auf welche die betreffenden Angriffspunkte beschränkt werden sollen, jeder mit dieser Beschränkung nicht vereinbaren Verschiebung widerstehen. In der That sind es ja auch in Wirklichkeit schliesslich Molekularkräfte, durch welche z. B. der Abstand zweier Punkte eines festen Körpers unverändert erhalten wird, oder der Faden, welcher Angriffspunkte verbindet, einer Verlängerung widersteht, oder endlich ein Bewegliches gehindert wird, aus einer gegebenen festen Bahn herauszutreten. Und wenn wir, um dies noch weiter auszuführen, beispielsweise annehmen, dass ein beweglicher Punkt genöthigt sei auf einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ zu bleiben, so sind es eben auch wieder molekulare Widerstandskräfte, welche eine von dieser Bedingungsgleichung abweichende Bewegung unmöglich machen. Kräfte dieser Art, solche nämlich, welche eine von den gegebenen Bedingungsgleichungen abweichende virtuelle Bewegung verhindern, nennen wir Widerstandskräfte, oder Reaktionskräfte. Führen wir sie ein, so erscheint nunmehr jedes System von Punkten, dessen Gleichgewicht wir untersuchen, wie ein System freier Angriffspunkte, deren jeder unter dem Einflusse der auf ihn wirkenden Kräfte, mit Einrechnung der Widerstandskräfte, im Gleichgewichte sich befindet. In der That, denken wir uns beispielsweise eine Schale von der Form $f(x, y, z) = 0$, in welcher eine kleine Kugel liegt, die uns einen materiellen Punkt vorstellen soll. Anstatt den von der Schwerkraft beherrschten Angriffspunkt als einen solchen sich zu denken, dessen Beweglichkeit durch die Bedingungsgleichung $f(x, y, z) = 0$ beschränkt ist, kann man sich denselben auch wie einen freien Angriffspunkt vorstellen, der in Ruhe ist, weil zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte auf ihn wirken: die Schwerkraft abwärts und die Widerstandskraft der Schale, der Widerstand nämlich des gegen den Druck der Schwere reagirenden Materiales der Schale, nach aufwärts. — Ebenso können wir in unserem Beispiele den auf der schiefen Ebene im Gleichgewichte befindlichen Körper wie einen freien uns denken, dessen Normaldruck gegen die schiefe Ebene stets durch einen gleichen und entgegengesetzten Reaktionsdruck von Seite der schiefen Ebene aufgehoben wird. — Es ist unmittelbar einleuchtend, dass der Reaktionsdruck, sowohl bei

der vorhin erwähnten Schale als auch bei der schiefen Ebene, keine Arbeit verrichtet, wenn eine den Bedingungsgleichungen entsprechende virtuelle Verschiebung vorgenommen wird, — also im ersten Falle eine Verschiebung längs der Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ der Schale, im zweiten längs der schiefen Ebene. In beiden Fällen erfolgt nämlich die virtuelle Verschiebung senkrecht zur Widerstandskraft*). In der That ist die Arbeit der Widerstandskräfte bei virtuellen Bewegungen, welche den gegebenen Bedingungsgleichungen entsprechen, immer Null, entweder aus demselben Grunde wie an den soeben erörterten Beispielen, oder weil die Widerstandskräfte erst dann auftreten, wenn eine von den Bedingungsgleichungen abweichende Verschiebung versucht wird.

Aus diesen Erwägungen erhellet nun erstens, dass der Satz, nach welchem die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte Null sein muss, dessen Giltigkeit für ein im Gleichgewichte befindliches System von freien Angriffspunkten, wie wir oben gesehen haben, für sich klar ist, auch in dem Falle beschränkender Bedingungen hinsichtlich der Beweglichkeit der Angriffspunkte gelten muss, da wir das System der Angriffspunkte im zweiten Falle durch Einführung der Widerstandskräfte auf ein System freier Angriffspunkte zurückführen können. Zweitens geht aus den vorstehenden Betrachtungen hervor, dass man bei der soeben besprochenen Ausdehnung des Lehrsatzes von der Summe der virtuellen Momente, auf die Widerstandskräfte keine Rücksicht zu nehmen braucht, indem deren virtuelle Momente, beziehungsweise Arbeiten, bei Einhaltung der gegebenen beschränkenden Bedingungen Null sind. Man braucht also bei der Bildung jener Momenten-Summe nur die von den beschränkenden Bedingungen unabhängigen Kräfte in Rechnung zu bringen. Unter fortwährender Voraussetzung umkehrbarer Verschiebungen können wir den Satz der virtuellen Momente endlich noch durch die obige Gleichung ausdrücken

$$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \cdots = \Sigma P \delta p = 0 \quad . \quad 51)$$

*) Dass eine Kraft bei einer zu ihrer Richtung senkrechten Verschiebung des Angriffspunktes keine Arbeit verrichtet, erhellet aus dem einfachen Grunde, weil in diesem Falle die Projektion der Verschiebung auf die Kraftrichtung Null ist. — Es sei hier noch erwähnt, dass ein höchst sinnreicher allgemeiner Beweis für das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten mit Hilfe des Flaschenzugprincipes von Lagrange gegeben worden ist.

In unserem Beispiele (Fig. 60) ergibt sich demnach die Relation $P_1 \cdot A_1 B_1 + P_2 \cdot (- A_2 A_2') = 0$. Wollen wir dieses Ergebniss sofort zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingung in dem gegebenen Falle benutzen, so ergibt sich daraus weiter $P_1 \cdot A_1 A_1' \sin \alpha = P_2 A_2 A_2'$ und ferner, insofern auch die unveränderliche Länge des Fadens zu den beschränkenden Bedingungen gehört und somit $A_1 A_1' = 2 A_2 A_2'$ sein muss, $2 P_1 \sin \alpha = P_2$.

(**Maschinen.**) Unter einer Maschine verstehen wir eine Vorrichtung, welche eine Transformation einer disponiblen Arbeitsgrösse Ps in eine beim idealen, mathematischen Zustande der Maschine gleiche Arbeitsgrösse $P's'$ gestattet, so dass also ein gegebenes Produkt: Kraft $\times$ Weg auf andere Art in Faktoren zerlegt wird. — Die Angriffspunkte von Kraft P und Last P' beschreiben gewöhnlich geradlinige oder kreisförmige Wege s, s'. Halten sich P und P' das Gleichgewicht und fallen die Wege s, s', wenn sie eben geradlinig sind (Flaschenzug), in jene Kraftrichtungen, oder haben sie, wenn sie kreisförmig sind (Wellrad), jene Richtungen zu Tangenten, so kann man den Satz der virtuellen Bewegungen auch auf diese endlichen Wege ausdehnen und schreiben

$$\Sigma Ps = 0 \quad \dots\dots\dots \quad 57)$$

nämlich im gegebenen Falle $Ps + P'(-s') = 0$ also $Ps = P's'$, wobei s und s' das entgegengesetzte Zeichen haben, da die Verschiebung des Angriffspunktes der Last P' (Fig. 61) derselben entgegengesetzt erfolgt (in der Figur nach aufwärts), wenn jene des Angriffspunktes der Kraft P im Sinne derselben (in der Figur nach abwärts) vorgenommen wird. Man kann also unter den gemachten Voraussetzungen das statische Verhältniss einer beliebig zusammengesetzten Maschine, ohne deren Einrichtung zu kennen, durch Vergleichung der correspondirenden Wege der Angriffspunkte von Kraft und Last finden, indem sich Kraft und Last verkehrt wie diese Wege verhalten.

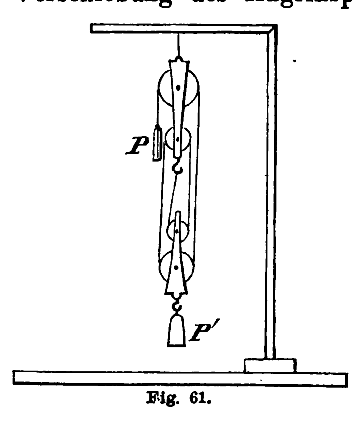


Fig. 61.

Haben die Richtungen von P und P' andere Lagen gegen

die Bewegungsrichtungen der Angriffspunkte, als angenommen wurde, so gilt die abgeleitete Relation für die auf die vorgedachten Richtungen entfallenden Componenten p und p', also

$$p s = p' s' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Bei allen wirklichen Maschinen wird ein Theil der disponiblen Arbeitsgrösse bei Ueberwindung der Bewegungshindernisse (Reibung) verbraucht; der Rest heisst Nutzeffekt und der Quotient desselben durch den theoretischen Effekt heisst Wirkungsgrad.

(**Princip von d'Alembert.**) Aus dem Lagrange'schen Gleichgewichtssatze (Princip der virtuellen Bewegungen) lässt sich ein allgemeiner dynamischer Satz ableiten, den wir im Nachstehenden erörtern wollen.

Wenn Körpertheilchen m_1, m_2, m_3 .... (Fig. 62), welche miteinander in irgend einem bestimmten Zusammenhange stehen, z. B. einer Pendelstange AB' angehörend, der Einwirkung von Kräften P_1, P_2, P_3... unterliegen, deren mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen parallele Componenten beziehungsweise X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 .... heissen sollen, so werden die besagten Theilchen wegen ihres gegenseitigen Zusammenhanges diesen Einwirkungen nicht frei folgen können, sondern im Allgemeinen andere Richtungen einschlagen und andere Geschwindigkeiten annehmen, als wenn sie unabhängig wären.

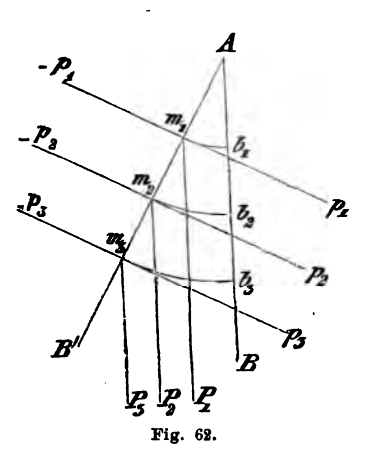


Fig. 62.

Man kann sich aber immerhin andere Kräfte $p_1 = m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2}$, $p_2 = m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2}$, $p_3 = m_3 \frac{d^2 s_3}{dt^2}$ .... denken, welche so beschaffen sind, dass sie den Theilchen, wenn sie frei wären, ganz dieselben augenblicklichen Bewegungen beibringen würden, welche sie in ihrer gegenseitigen Verbindung unter Einfluss der vorhandenen Kräfte (P_1, P_2...) wirklich machen. Denkt man sich diese Kräfte p_1, p_2.... umgekehrt, d. i. als $-p_1$, $-p_2$.... an den Theilchen des betrachteten Systems nebst den daselbst bereits wirk-

samen Kräften (P_1, P_2...) angebracht, so muss offenbar Gleichgewicht eintreten.

Wir wollen nun annehmen, dass die Componenten von $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$... beziehungsweise $-\xi_1$, $-\eta_1$, $-\zeta_1$; $-\xi_2$, $-\eta_2$, $-\zeta_2$; $-\xi_3$, $-\eta_3$, $-\zeta_3$.... seien, so haben wir jetzt an dem in der beschriebenen Weise ins Gleichgewicht gesetzten Systeme im Ganzen sowol die X, Y, Z als auch die $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ wirksam, die wir paarweise so ordnen können:

$(X_1-\xi_1)$, $(Y_1-\eta_1)$, $(Z_1-\zeta_1)$; $(X_2-\xi_2)$, $(Y_2-\eta_2)$, $(Z_2-\zeta_2)$

u. s. w. Da diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so können wir auf dieselben die Formel 55 anwenden, wobei nur zu beachten ist, dass wir statt $\Sigma X \delta x$ einsetzen müssen: $\Sigma(X-\xi)\delta x$ u. s. w. Wir erhalten dann

$$\Sigma[(X-\xi)\delta x + (Y-\eta)\delta y + (Z-\zeta)\delta z] = 0 \quad . \quad 59)$$

Wir sehen auf diese Art das ursprünglich betrachtete dynamische (Bewegungs-) Problem auf ein statisches (Gleichgewichts-) Problem zurückgeführt. Drücken wir endlich noch die Kräfte ξ, η, ζ durch die betreffenden Massen und Beschleunigungen aus, nämlich

$$\xi_1 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}; \quad \eta_1 = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}; \quad \zeta_1 = m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad \text{ferner}$$

$$\xi_2 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}; \quad \eta_2 = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}; \quad \zeta_2 = m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2}$$

. . . .

so erhalten wir als Differentialgleichung der betrachteten Bewegung

$$\Sigma \left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0 \quad . \quad 60)$$

Dies ist der Ausdruck des vereinigten Lagrange-d'Alembert'schen Gesetzes.

Um dem Theorem die allgemeine Anwendbarkeit zu sichern, müssen wir dabei noch ein für allemal annehmen, dass wir alle Körper, welche bei der betrachteten Bewegung durch Widerstandskräfte aufeinander reagiren, mit in das System, auf welches wir die Formel 60 anwenden, einbeziehen, wodurch wir zugleich erzielen, dass keine Bewegungshindernisse mit

einseitigem Widerstande mehr vorkommen können, somit alle virtuellen Bewegungen (δs_1, δs_2, $\delta s_3 \ldots$) umkehrbar erscheinen und demnach (im Gegensatze zu Formel 56) rechts vom Gleichheitszeichen immer 0 zu stehen kommt. Dabei erstreckt sich aber dann (im Gegensatze zu Formel 55 und 56) das Summenzeichen auf alle an der Bewegung theilnehmenden Massen, auch wenn es solche sind, auf welche keine der gegebenen Kräfte (X, Y, Z) direkt einwirken.

Die eingeklammerten Ausdrücke $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, in Formel 60 pflegt man die Componenten der verlornen Kräfte zu nennen, weshalb sich der Satz auch so aussprechen lässt: Die Componenten der verlornen Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Die Bezeichnung „Componenten der verlorenen Kräfte" rechtfertigt sich durch folgende Betrachtung.

Es stelle (Fig. 63) P die Kraft vor, welche auf den unfreien Punkt O (den wir uns nämlich einem zusammenhängenden Punktsysteme angehörend denken) einwirkt und p die seiner wirklichen Bewegung entsprechende Kraft (z. B. $p = m\frac{d^2s}{dt^2}$), d.h. diejenige, welche, wenn der Punkt frei wäre, für sich allein die wirklich eintretende Bewegung hervorbringen würde. Man kann sich P in p und eine durch den bestimmten Zusammenhang zwischen O und den andern Punkten aufgehobene (also „verlorene") Kraft u zerlegt denken. Fügt man nun am unfreien Punkte O zu P das p in entgegengesetztem Sinne (als $-p$) hinzu, so gibt dies mit P offenbar die verlorene Kraft u, und es müssen sich daher die Componenten P und $-p$ der verlorenen Kraft am unfreien Punkte O das Gleichgewicht halten. Dasselbe gilt natürlich auch für die auf orthogonale Axen bezogenen Componenten der verlorenen Kräfte aller Punkte.

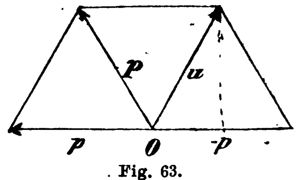


Fig. 63.

(**Bewegungsgesetze des Schwerpunktes; Explosionen; Stoss.**) Der soeben entwickelte Satz gestattet eine sehr wichtige Anwendung. Wir denken uns ein System von beliebig verbundenen und in Wechselwirkung stehenden Massentheilchen in einem gegebenen Bewegungszustande. Derselbe unterliegt

jedenfalls der allgemeinen Bewegungsgleichung Formel 60. Der Fall specialisirt sich aber, wenn wir weiterhin annehmen, das betrachtete System befinde sich unter solchen Verhältnissen, dass es nach allen Richtungen hin virtuelle Verschiebungen ohne Aenderung der relativen Lage seiner Theile, d. h. in der Art gestatte, dass alle Theilchen eine gleich grosse Verschiebung nach derselben Seite hin, z. B. vom Betrage δx in der Richtung der x-Axe erfahren. Man nennt ein System von Massen in beliebiger starrer oder beweglicher Anordnung, insofern es als Ganzes die beschriebene freie Beweglichkeit besitzt, ein freies System. Die Theile desselben können dabei, wie alsbald an Beispielen gezeigt werden wird, in der mannigfaltigsten Weise der Wechselwirkung innerer und auch der Einwirkung äusserer Kräfte unterworfen sein. Als ein freies System dieser Art stellt sich z. B. das Planetensystem im Weltraume dar, oder allenfalls auch ein in Wurf- oder Fallbewegung begriffenes System von Massen, die unter sich beliebig verbunden sein und, wie etwa die Theile eines thierischen Körpers oder eines Mechanismus, unter dem Einfluss innerer (Muskel- oder Feder-) kräfte beliebige relative Bewegungen ausführen können, wobei also das Vorhandensein äusserer Kräfte, z. B. der Schwerkraft, nicht ausgeschlossen ist.

Bleiben wir vorerst bei der Annahme stehen, das betrachtete System sei in der That ein völlig freies, welches nach allen Richtungen hin virtuelle Verschiebungen (δx, δy, δz) zulässt, und nehmen wir eine solche zunächst nur hinsichtlich der x-Axe vor, so dass $\delta y = 0$ und $\delta z = 0$ erscheint. Da nach dem Vorausgeschickten δx für alle m gleich ist, so wird aus Formel 60 in diesem Falle

$$\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x = \delta x\,\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

folglich $\Sigma X = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}$. Sind virtuelle Verschiebungen hinsichtlich aller drei Axen möglich, so erhält man sofort

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} \\ \Sigma Y &= \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} \\ \Sigma Z &= \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

Diese Gleichungen, welche wir soeben mit Hilfe des d'Alembert'schen Satzes gewonnen haben, hätten wir eigentlich auch auf einem viel näher liegenden Wege erreichen können. Es ist nämlich klar, dass ein Massentheilchen m, wie immer es auch mit anderen Massentheilchen verbunden sein mag, schliesslich doch nicht anders sich bewegen kann als mit einer Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ in der betrachteten Richtung, welche gleich ist der Gesammtsumme der auf dieselbe Richtung bezogenen Kraftcomponenten, dividirt durch die Masse m des Beweglichen, insofern man nur in jene Gesammtsumme alle, sowohl inneren wie auch äusseren Kräfte, welchen das Massentheilchen m ausgesetzt ist, einbezieht, da wir, wie die S. 113—115 vorausgeschickten Betrachtungen lehren, unter der soeben ausgesprochenen Voraussetzung, das Massentheilchen m wie ein freies behandeln können. Bezeichnen wir also mit X die der x-Axe entsprechende Componenten-Summe aller auf das Theilchen m einwirkenden Kräfte, so wird $\frac{X}{m} = \frac{d^2x}{dt^2}$ seine Beschleunigung also $X = m\frac{d^2x}{dt^2}$ und somit für das ganze System $\Sigma X = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}$ sein müssen.

Diese Gleichungen (61) können auch in der Gestalt $\Sigma X = \frac{d^2}{dt^2}\Sigma mx$; $\Sigma Y = \frac{d^2}{dt^2}\Sigma my$ und $\Sigma Z = \frac{d^2}{dt^2}\Sigma mz$ geschrieben werden, nämlich mit Einführung der zweimal nach der Zeit differenzirten Grössen Σmx, Σmy und Σmz. (Die Differentiation nach der Zeit ist verständlich, wenn man sich gegenwärtig hält, dass ja vermöge der stattfindenden Bewegung x, y, z Funktionen der Zeit sind.) Die Bedeutung dieser Summen gestattet aber noch eine andere Ausdrucksweise. Bezeichnet man nämlich die Coordinaten des Schwerpunktes mit x_0, y_0 und z_0 und die Gesammtmasse Σm des Systems mit M, so ist bekanntlich*) $\Sigma mx = x_0 \Sigma m = Mx_0$, ebenso $\Sigma my = y_0 \Sigma m = My_0$ und $\Sigma mz = z_0 \Sigma m = Mz_0$; folglich $\Sigma X = \frac{d^2}{dt^2} Mx_0$; $\Sigma Y = \frac{d^2}{dt^2} My_0$; $\Sigma Z = \frac{d^2}{dt^2} Mz_0$ oder

---

*) Siehe den Lehrsatz von den Coordinaten des Schwerpunktes, Formel 13 und 14; wobei jedoch zu bemerken ist, dass dort statt x_0, y_0 und z_0 beziehungsweise die (hier in anderem Sinne gebrauchten) Bezeichnungen X, Y und Z vorkommen.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= M\frac{d^2x_0}{dt^2} \\ \Sigma Y &= M\frac{d^2y_0}{dt^2} \\ \Sigma Z &= M\frac{d^2z_0}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

Dabei ist unter dem Schwerpunkte des Systems der Punkte m stets der Punkt zu verstehen, der im betrachteten Zeitmomente zum Schwerpunkte werden würde, wenn man alle Punkte m in ihrer augenblicklichen relativen Lage fest verbände.

Anderseits stellen die Ausdrücke links vom Gleichheitszeichen die Summen der Componenten vor, sowohl der innern wie der äussern Kräfte, welche auf die verschiedenen Punkte des Systems wirken, in welcher Hinsicht jedoch sogleich gezeigt werden wird, dass die Componenten der innern Kräfte, als paarweise sich tilgend, entfallen, und sonach nur äussere Kräfte in Betracht kommen.

Aus diesen letzten Gleichungen geht hervor, dass die einer bestimmten Richtung entsprechenden auf die einzelnen Massentheilchen des Körpers wirkenden beschleunigenden Kräfte zusammengenommen dem Beschleunigungsdrucke gleich sind, der erforderlich wäre, um der vereinigten Gesammtmasse des Körpers die in derselben Richtung thatsächlich vorhandene Beschleunigung des Schwerpunktes zu ertheilen. Denkt man sich also alle jene Kräfte im Schwerpunkte angreifend und in eben diesem Schwerpunkte die Gesammtmasse des Körpers vereinigt, so würde der Schwerpunkt bei solcher Anordnung ganz dieselbe Beschleunigung erfahren, die er im betrachteten Falle wirklich erhält. Dies lässt sich so aussprechen, dass man sagt: Der Schwerpunkt bewegt sich stets so, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und auf ihn alle Kräfte wirkten.

Wir haben bisher angenommen, dass in den Summen ΣX, ΣY, ΣZ auch die Componenten innerer Kräfte mit inbegriffen sind; betrachten wir jedoch diese näher, so verschaffen wir uns leicht die Ueberzeugung, dass sie auf die Bewegung des Schwerpunktes ohne Einfluss sind. Die sogenannten inneren Kräfte sind nämlich ihrer Natur nach stets paarweise gleich und entgegengesetzt. Man denke beispielsweise an die Kräfte,

welche zwei Punkte in einer bestimmten Entfernung von einander zu erhalten suchen; die Kräfte, welche bei jedem Versuche, diese Entfernung zu ändern, wachgerufen werden, wirken stets gleich und entgegengesetzt auf die betreffenden Punkte, sowie ja überhaupt die Wechselwirkung zweier Punkte — z. B. Anziehung oder Abstossung — immer von der Art ist, dass die auf den einen Punkt wirkende Kraft der entgegengesetzt gerichteten, auf den andern Punkt wirkenden gleich ist; dasselbe gilt z. B. auch von dem Drucke der Pulvergase bei einer Explosion oder von einer Federkraft, welche zwei Theile des Körpers von oder gegeneinander zur Bewegung antreibt. Solche Kräfte werden dann, wenn wir sie uns dem eben vorgetragenen Satze entsprechend in den Schwerpunkt als Angriffspunkt versetzt denken (natürlich ihrer ursprünglichen Lage parallel), daselbst gegenseitig sich aufheben müssen, so dass hinsichtlich der Beschleunigung des Schwerpunktes nur die äusseren Kräfte in Betracht kommen. Sind solche äussere Kräfte überhaupt nicht vorhanden, so wird der Schwerpunkt, wenn er von vornherein in Ruhe war, in Ruhe bleiben, und wenn er in Bewegung war, geradlinig und gleichförmig sich bewegen, wie immer auch innere Kräfte am Körper thätig sein mögen. Wir nennen dieses Gesetz das Gesetz der Erhaltung des Schwerpunktes; es entspricht den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= M\frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0 \\ \Sigma Y &= M\frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0 \\ \Sigma Z &= M\frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 63)$$

deren Sinn noch deutlicher hervorgeht, wenn man die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen in der Form $\frac{d}{dt}M\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{d}{dt}M\frac{dy_0}{dt}$ und $\frac{d}{dt}M\frac{dz_0}{dt}$, nämlich als Differentialquotienten der Bewegungsgrössen der im Schwerpunkte vereinigten Gesammtmasse sich vorstellt. Diese Bewegungsgrössen erscheinen nämlich, wenn ihre Differentialquotienten Null sind, als constant, nämlich

$$\left.\begin{aligned} M\frac{dx_0}{dt} &= A \\ M\frac{dy_0}{dt} &= B \\ M\frac{dz_0}{dt} &= C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

wenn A, B und C constante Zahlen sind.

Vermöge der bereits erwähnten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Mx_0 &= \Sigma mx \\ My_0 &= \Sigma my \\ Mz_0 &= \Sigma mz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

kann man im Allgemeinen auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} M\frac{dx_0}{dt} &= \Sigma m\frac{dx}{dt} \\ M\frac{dy_0}{dt} &= \Sigma m\frac{dy}{dt} \\ M\frac{dz_0}{dt} &= \Sigma m\frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

indem man die Bewegungsgrösse der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Gesammtmasse durch die Summen der auf dieselbe Axenrichtung bezogenen Bewegungsgrössen der einzelnen Massentheilchen sich ersetzt denken kann.

Ein häufig vorkommender specieller Fall ist der, dass in horizontaler Richtung keine äusseren Kräfte wirken, sondern nur in vertikaler Richtung die Schwerkraft, so dass der Schwerpunkt nur in vertikaler Richtung, wenn er in derselben überhaupt beweglich ist, eine Beschleunigung erhalten kann, während sonst nur innere Kräfte, die auf seine Bewegung bekanntlich keinen Einfluss haben, in Betracht kommen.

Solche innere Kräfte sind z. B. bei den Muskelbewegungen des thierischen Körpers wirksam, oder allenfalls beim Abfeuern eines Geschützes, wenn wir nicht Geschütz und Geschoss für sich, sondern beide zusammen als das System ansehen, dessen Schwerpunkt wir betrachten*), oder endlich beim Platzen eines

*) Bei Kanonen ist das Gewichtsverhältniss $\mu = \frac{\text{Rohr} + \text{Lafette}}{\text{Geschoss}}$ etwa 200. — Die lebendige Kraft des Schusses ist dann $\mu = 200$ mal grösser als die des Rückstosses. — Ebenso erhalten im Allgemeinen bei Explosionen die kleineren Bruchstücke verhältnissmässig mehr lebendige Kraft, wesshalb

Hohlgeschosses, wenn wir eben nach der Explosion die Bruchstücke zusammengenommen als das System ansehen, von dessen Schwerpunkt die Rede sein soll. Das Thier wird z. B. auf einer absolut glatten Unterlage (Eisfläche), wo die Reibung keine Mittel bietet, durch Anstemmen der Extremitäten äussere Kräfte ins Spiel zu setzen, durch alle möglichen Bewegungen seiner Extremitäten keine Bewegung, beziehungsweise Bewegungsänderung seines Schwerpunktes hervorbringen können. Kann es aber seine Extremitäten gegen einen Gegenstand stemmen, so bildet es mit diesem Gegenstande und Allem, was damit in fester Verbindung steht, zusammen ein anderes System, auf welches sofort unser Satz anzuwenden ist. — Ebenso im zweiten Falle. War das geladene Geschütz und somit der Schwerpunkt des Systems vor dem Abfeuern in Ruhe, so kommt derselbe auch durch das Abfeuern nicht in horizontale Bewegung (von der durch die Schwerkraft bedingten Vertikalbewegung sehen wir ab), indem Geschütz und Geschoss nach entgegengesetzten Richtungen hin Geschwindigkeiten annehmen, die im verkehrten Verhältnisse der beiden Massen stehen.

Denkt man sich endlich ein Hohlgeschoss (Fig. 64), dessen Schwerpunkt S eine parabolische Bahn beschreibt, explodirt, so wird, vom Luftwiderstande abgesehen, der Schwerpunkt ungestört seine Bewegung fortsetzen, solange keines der Bruchstücke an einen äusseren Gegenstand stösst; denn die Kräfte, welche die Explosion bewirkten, haben, als innere Kräfte, auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss, wohl aber würden durch den Stoss der Bruchstücke gegen andere Gegenstände äussere Kräfte ins Spiel gesetzt werden. Zum Auftreten solcher äusserer Kräfte geben auch Bewegungshindernisse Anlass, von welchen wir daher in allen den betrachteten Fällen absehen.

Fig. 64.

In dem speciellen Falle, dass der Schwerpunkt vor dem

man die Hohlgeschosse so einrichtet, dass die Zahl der „Sprengpartikel“ möglichst gross ausfällt.

Eintreten der durch innere Kräfte hervorgebrachten Körperbewegungen in Ruhe war, wenn also z. B. in dem vorhin erwähnten Falle einer horizontalen Unterlage, $\frac{dx_0}{dt} = \frac{dy_0}{dt} = 0$, so folgt aus den Gleichungen 66:

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} = 0.$$

Da nun der Schwerpunkt durch die Thätigkeit der innern Kräfte nicht in Bewegung gesetzt wird, so werden diese Relationen auch nachher fortbestehen und lassen erkennen, dass die durch die Thätigkeit innerer Kräfte den Körpertheilchen ertheilten Bewegungsgrössen stets so angeordnet sein müssen, dass sie sich bezüglich jeder Axenrichtung gegenseitig aufheben.

Aus den Gleichungen 63, welche eine gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes voraussetzen, nämlich

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67)$$

geht unmittelbar folgendes hervor.

Ist ein Körper unter dem Einflusse bewegender Kräfte und Widerstände in eine gleichförmige Bewegung gekommen, z. B. ein Dampfschiff oder ein Bahnzug, so müssen Kraft und Widerstand einander das Gleichgewicht halten, d. h. die zur Vorwärtsbewegung aufgewendete Triebkraft muss ins Gleichgewicht gekommen sein mit der Gesammtheit der zu bewältigenden Widerstände. Es müssen sich nämlich bezüglich jeder Axenrichtung gleiche und entgegengesetzte Trieb- und Widerstands-Kräfte aufheben.

Den Lehrsätzen von der Bewegung des Schwerpunktes, welche die fortschreitende Bewegung betreffen, stehen die sogenannten Flächensätze zur Seite, welche sich auf die Drehbewegungen beziehen. Wir übergehen dieselben an dieser Stelle, da sie in den folgenden Kapiteln keine Anwendung finden und ohne grosse Ausführlichkeit in der Darstellung nicht klar gemacht werden könnten.

Eine wichtige Anwendung findet das Gesetz der Erhaltung des Schwerpunktes bei der Entwicklung der Stossgesetze. Denken wir uns Körper, auf welche keine äussern Kräfte wirken, zum Stosse gelangend, so haben wir es nur mit molekularen Wechselwirkungen beim Stosse zu thun, die als innere

Kräfte zu betrachten sind und auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss haben. Nennen wir u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der zum Stosse gelangenden Massen M und m vor dem Stosse, so wird diese Geschwindigkeit aus den angeführten Gründen durch den Stoss nicht geändert werden. Nach Formel 66 lässt sich nun die Geschwindigkeit u des Schwerpunktes aus den Geschwindigkeiten V und v der zum Stosse gelangenden Massen vor dem Stosse (wir wollen uns beispielsweise den Fall des centralen Stosses elastischer Kugeln vergegenwärtigen) und C und c nach dem Stosse leicht berechnen. Man erhält nämlich für die Geschwindigkeit u vor dem Stosse $u(M+m) = MV + mv$ und für die ungeänderte Geschwindigkeit u nach dem Stosse: $u(M+m) = MC + mc$, somit

$$MV + mv = MC + mc \quad \ldots\ldots \quad 68)$$

Andrerseits erhält man nach dem Satze von den lebendigen Kräften mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Arbeit der innern Kräfte, welche bei vollkommen elastischen Kugeln bis zur stärksten Zusammendrückung verrichtet wird, gleich und entgegengesetzt ist der Arbeit derselben Kräfte bei der Ausdehnung in der zweiten Periode das Stosses, somit eine Aenderung der lebendigen Kraft nicht stattfinden kann die Gleichung

$$MV^2 + mv^2 = MC^2 + mc^2 \quad \ldots\ldots \quad 69)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst

$$\frac{MV^2 - MC^2}{MV - MC} = \frac{mc^2 - mv^2}{mc - mv}$$

$$V + C = c + v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

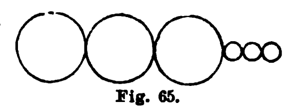
Man erhält aus 68 $MC = MV + mv - mc$ und aus 70 nach beiderseitiger Multiplication mit m $mc = mV + mC - mv$, durch dessen Einsetzung $MC = MV + mv - mV - mC + mv$ und wenn man rechts vom Gleichheitszeichen $MV - MV$ hinzufügt und ordnet $(M+m)C = 2(MV + mv) - (M+m)V$, also mit Rücksicht auf $u = \frac{MV+mv}{M+m}$,

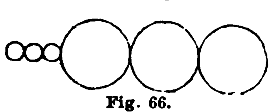
$$C = 2u - V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Ebenso erhält man

$$c = 2u - v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

Aus diesem Satze lässt sich eine für die Wellenbewegung wichtige Folgerung ableiten. Es kommt in der Akustik beispielsweise der Fall vor, dass Wellen aus einem dichteren Mittel in ein dünneres oder umgekehrt übergehen. Es lässt sich dieser Vorgang zurückführen auf den Stoss, welcher stattfindet in einer Reihe von elastischen Kugeln. Der Fall, dass eine Welle von einem dichteren Mittel in ein dünneres Mittel übergeht, lässt sich zurückführen auf den Stoss in zwei Kugelreihen (Fig. 65), von welchen die erstere aus grösseren, die zweite aus kleineren Kugeln besteht. Das Umgekehrte gilt vom andern Falle (Fig. 66). Um die in beiden Fällen eintretenden Vorgänge zu beurtheilen, kommt es zunächst darauf an, den Stoss zwischen zwei elastischen Kugeln ungleicher Masse in Betracht zu ziehen.


Fig. 65.


Fig. 66.

Aus Formel 71 findet man durch Einführung des Werthes für u unter der Voraussetzung $v = 0$, was dem Falle des Stosses einer Kugel (M) gegen eine ruhende (m) entspricht, für die Geschwindigkeit der stossenden Kugel nach dem Stosse

$$C = V \cdot \frac{M - m}{M + m} \quad \ldots \ldots \quad 73)$$

Hieraus geht hervor, dass die Geschwindigkeit der stossenden Kugel nach dem Stosse ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, jenachdem $M > m$ (Fig. 65) oder $M < m$ (Fig. 66), d. h. im ersten Falle wird die stossende Kugel nach erfolgtem Stosse sich noch weiter nach vorwärts, im zweiten Falle dagegen nach rückwärts bewegen. Aehnliches wird eintreten, wenn z. B. der verdichtete Theil einer Schallwelle (Fig. 67) an die Grenze eines dichteren oder dünneren Mittels gelangt. In beiden Fällen wird eine Wellenbewegung ins ursprüngliche Mittel zurückkehren, im ersten Falle jedoch an der Trennungsfläche mit einer Verdichtung, im zweiten mit einer Verdünnung beginnend, so dass die rückkehrende Welle im zweiten Falle im Vergleiche mit der im ersten umgekehrt erscheint.

Fig. 67.

(**Princip des kleinsten Zwanges.**) Das Princip der virtuellen Bewegungen gestaltet die Statik zu einem mathematischen Problem, während andererseits wieder das d'Alembert'sche

Princip die Dynamik auf die Statik zurückführt; demnach muss jedes Grundprincip der Mechanik in den beiden vorgenannten Theoremen enthalten sein. Dies schliesst nicht aus, dass dieselben Wahrheiten, welche im Lagrange-d'Alembert'schen Gesetze ausgedrückt sind,*) noch in anderen Formen wiedergegeben werden können, und dass ein veränderter Ausdruck derselben Gesetze sehr nützlich sein kann, indem er neue Gesichtspunkte und ein tieferes Verständniss der allgemeinsten Lehrsätze der Mechanik eröffnet. Ein sehr lehrreiches Theorem dieser Art ist z. B. das sogenannte Princip des kleinsten Zwanges, welches Gauss aufgestellt hat. Es lautet dahin, dass die Bewegung eines Systems materieller, wie immer mit einander verknüpfter und in ihren Bewegungen beschränkter Punkte in jedem Augenblicke in möglichst grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung d. i. eben, wie man zu sagen pflegt, unter möglichst kleinstem Zwange, geschieht. Dabei gilt als Mass des Zwanges für das ganze System in jedem Augenblicke die Summe der Produkte des Quadrates der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung mit seiner Masse. Es seien die Massen der Punkte m, m' ...., ferner A, A' ... ihre Plätze zur Zeit t; sodann B, B' .... die Plätze, welche die Punkte zur Zeit $t + dt$ in Folge der während dieser Zeit wirksamen Kräfte und vermöge der zur Zeit t erlangten Bewegungsrichtungen und Geschwindigkeiten einnehmen würden, falls sie alle frei wären; und endlich C, C' .... die wirklichen Plätze zur Zeit $t + dt$, so sind die Strecken BC, $B'C'$ .... als die durch die beschränkenden Bedingungen verursachten Abweichungen von der freien Bewegung anzusehen und es gilt dann, wie Gauss gezeigt hat, der Satz:

$$m\overline{BC}^2 + m'\overline{B'C'}^2 + \cdots = \Sigma m \overline{BC}^2 = \text{Minimum} \quad . \quad 74)$$

d. h. diese Summe ist kleiner als alle anderen analogen Summen, die man erhalten würde, wenn man den betrachteten Punkten andere mit den beschränkenden Bedingungen des Systems vereinbare Abweichungen von der freien Bewegung zugedacht hätte.

*) So nennen wir die in Formel 60 ausgedrückte Vereinigung des Principes der virtuellen Bewegungen mit dem d'Alembert'schen.

Man denke sich eine Kugel in einer Schale (Figur 68), deren Form durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ bestimmt sein möge. Die Kugel wird unter dieser beschränkenden Bedingung für ihre Bewegung unter dem Einflusse der Schwerkraft sich an die tiefste Stelle D begeben auf einem gewissen Wege ACD. Betrachten wir das in einem Zeitdifferenziale dt zurückgelegte Element AC dieses Weges und vergleichen dasselbe mit jenem AB, welches bei freier Bewegung zurückgelegt worden wäre, so erscheint uns BC als die der Kugel durch die beschränkenden Bedingungen aufgezwungene Abweichung von der freien Bewegung und der Sinn des Gesetzes vom kleinsten Zwange ist nun der, dass die Kugel sich stets so bewegt, dass diese Abweichung von der freien Bewegung die kleinste unter den gegebenen Bedingungen mögliche ist. Durch Wiederholung des Raisonnements vom Punkte C aus für das nächste Zeitelement dt u. s. w. für jedes folgende, jedoch stets mit Berücksichtigung der bereits erlangten Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit, kann man sich nämlich den einer endlichen Zeit entsprechenden Weg der Kugel ermittelt denken. Im allgemeinsten Falle wird dabei (nach Massgabe der Gestalt der krummen Fläche) eine Curve von doppelter Krümmung herauskommen.

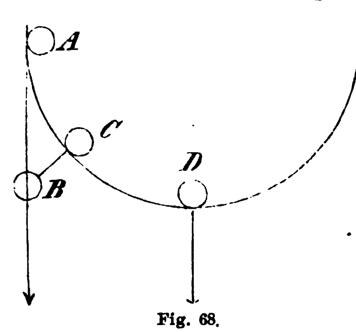


Fig. 68.

(Beweise des Satzes findet man im 5. Bande der Werke von Gauss; in der höhern Mechanik von Ritter u. s. w.)

(**Axiome der Mechanik.**) Bei der Entwickelung der Lehrsätze der Mechanik pflegt man von gewissen Voraussetzungen über die Beziehungen zwischen Kraft und Materie und zwischen Kräften unter sich auszugehen, die man als die allgemeinsten Grundsätze der Mechanik ansehen kann. Man kann dieselben, insofern sie durch scharfsinnige Beobachtungen aus den Naturerscheinungen abstrahirt worden sind, gewissermassen als Erfahrungssätze betrachten. Man nennt sie auch Axiome, nicht so sehr in dem Sinne, als wären sie von vornherein ohne Beweis einleuchtend, als vielmehr, weil sie einen eigentlichen

theoretischen (a priori zu führenden) Beweis nicht zulassen und weil sie, so schwierig es auch war, zu diesen Abstraktionen zu gelangen, doch, einmal aufgefunden und klar aufgefasst, von so natürlicher Einfachheit sind, dass man sich leicht von der Unhaltbarkeit widersprechender Annahmen überzeugen kann. Diese Grundsätze sind folgende:

I. Das Gesetz der Trägheit. Es besteht darin, dass ein Körper von selbst, d. i. ohne äussere Einwirkung, eine Aenderung seines Bewegungszustandes nicht erfahren kann.

II. Das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, auch Gesetz der Wechselwirkung genannt. Es besagt, dass die Kraft, mit welcher ein Körper A von einem andern Körper B afficirt wird, genau dieselbe ist, mit welcher der Körper B vom Körper A afficirt wird.

III. Das Gesetz der Unabhängigkeit der Wirkung mehrerer Kräfte. Es lautet dahin, dass, wenn mehrere Kräfte gleichzeitig auf denselben Punkt wirken, jede dieselbe Wirkung hervorbringt, als wenn sie allein wirkte. An diese Sätze reiht sich ein vierter, der als Folgesatz des dritten angesehen werden kann und darin besteht, dass die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt unabhängig ist von der Bewegung, welche dieser Punkt schon vorher gehabt hat.

Wir wollen zur Erläuterung dieser Gesetze einige Bemerkungen machen. Das erste Gesetz schliesst, mit anderen Worten gesagt, die Möglichkeit aus, dass ein Körper ohne Einwirkung von aussen eine Geschwindigkeit, beziehungsweise einen Geschwindigkeitszuwachs, sei er positiv oder negativ, erhalten kann. Die Undenkbarkeit eines solchen Vorganges (wobei es ganz gleichgiltig ist, ob wir bezüglich des in Rede stehenden Geschwindigkeitszuwachses annehmen, dass die Richtung desselben bekannt sei oder ermittelt werden könne oder nicht) ergibt sich aus der Erwägung, dass ein solcher Vorgang das Entstehen oder Verschwinden einer lebendigen Kraft aus nichts oder durch nichts voraussetzen würde, was aus denselben Gründen nicht möglich ist, welche die Existenz eines perpetuum mobile ausschliessen. Der Sinn des zweiten Satzes wird aus folgendem Beispiel erhellen. Wenn wir γ die Beschleunigung nennen, welche eine Masseneinheit von einer anderen Masseneinheit in einer gewissen Entfernung erhält, so ist, da beiderseits ganz dieselben Verhältnisse bestehen, kein Grund vorhanden, wess-

halb die zweite Masseneinheit von der ersten eine andere Beschleunigung erhalten sollte. In diesem Falle sind also auch offenbar die Kräfte gleich, mit welchen beide Masseneinheiten auf einander wirken, so dass der Satz in diesem speciellen Falle als selbstverständlich gelten kann. Er lässt sich aber leicht auf den allgemeinen Fall ausdehnen, dass zwei beliebige Massen M und m, die wir uns in einer gewissen Entfernung denken, aufeinander einwirken. Wir denken uns beide Massen in Masseneinheiten zerlegt, deren also die erste M, die zweite m hat, so wird jede Masseneinheit von M, folglich auch die ganze Masse M selbst von der Masse m die Beschleunigung γ $m$mal erhalten, so dass $G = m\gamma$ die Beschleunigung der Masse M ist; ebenso wird jede Masseneinheit von m, also auch die Masse m selbst die Beschleunigung γ Mmal erhalten, so dass also $g = M\gamma$ die Beschleunigung der Masse m ist; wir sehen daraus, dass

$$G : g = m : M \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

$$MG = mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

welche Producte eben die auf die beiden Massen wirkenden beschleunigenden Kräfte, die somit gleich sind, vorstellen. Es ist dabei auch wieder ganz gleichgiltig, was man sich von Stoff oder Materie für Vorstellungen macht. Wir beschränken uns darauf, eine bestimmte Quantität von Materie oder Stoff Masse zu nennen und durch eine desto kleinere Zahl auszudrücken, je grösser die Beschleunigung ist, welche diese Quantität von Materie durch irgend eine beschleunigende Kraft erfährt.

Der dritte Satz wird durch die Betrachtungen erläutert, durch welche man zum Lehrsatze vom Kräftenparallelogramm, beziehungsweise Parallelogramm der Bewegungen geleitet wird und soll daher hier nicht weiter besprochen werden.

Zweites Hauptstück.

Mechanik flüssiger Körper.

Wir schicken voraus, dass die neueren Anschauungen über die Constitution flüssiger Körper in den einleitenden Bemerkungen zu den später folgenden Erörterungen über gasförmige Körper angedeutet werden sollen und dass wir hier andererseits auch nicht auf eine Wiederholung Desjenigen eingehen, was schon beim ersten Unterrichte in der Physik gelehrt zu werden pflegt, sondern vielmehr das als bekannt Vorauszusetzende mit einigen weiteren Ausführungen und Zusätzen ergänzen wollen.

(**Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten.**) Die Flüssigkeiten sind bekanntlich in so geringem Grade zusammendrückbar, dass sie bei vielen Betrachtungen als nachgerade unzusammendrückbar angesehen werden. Der Grad der Zusammendrückbarkeit ist für verschiedene Flüssigkeiten ermittelt worden. Wir wollen in dieser Richtung, mit Uebergehung älterer Versuche und Methoden, in gedrängtester Kürze das von Oersted angewendete Verfahren besprechen, zu dessen Erläuterung die schematische Zeichnung (Fig. 69) dienen mag.

Fig. 69.

Ein thermometerähnliches Gefäss P (Piezometer genannt) wird mit der zu untersuchenden Flüssigkeit vollständig gefüllt und die Mündung des engen Rohres hierauf unter Quecksilber gebracht. Hat man die vollständige Füllung durch eine geringe Erwärmung bewirkt, so wird bei der Wiederabkühlung eine an die zu untersuchende Flüssigkeit unmittelbar sich anschliessende feine Quecksilbersäule im engen Rohre (z. B. bis a) sich erheben. Neben dem Piezometer denken wir uns noch ein Manometer M ins Quecksilbergefäss eingesetzt. Wir setzen voraus, der ganze bis jetzt beschriebene Apparat befinde

sich in einem grossen, starken mit entsprechenden Metallfassungen versehenen Glaszylinder *ABCD*, an dessen oberem Theile eine sehr enge Compressionspumpe *EF* angebracht ist. Wir denken uns diesen Glascylinder bis zum Stempel *K* der Pumpe vollständig mit Wasser gefüllt, was durch eine in der Zeichnung nicht angedeutete Communication der Pumpe mit einem seitlich angebrachten Wasserbehälter leicht bewerkstelligt werden kann, und nach Absperrung dieser Communication den Kolben niedergedrückt. Da die Wand des Piezometers in der Richtung ihrer Normalen beiderseits gleichen Druck erfährt, somit keine Volumsänderung des Piezometers stattfinden kann (wenn wir davon absehen, dass das Material der Piezometerwände selbst eine gewisse äusserst geringe Zusammendrückung erfährt), so wird ein im engen Rohre des Piezometers beobachtetes Steigen der Quecksilbersäule (z. B. bis *b*) eben nur von der durch den herrschenden Druck (der am Manometer in Atmosphären abgelesen werden kann) bewirkten Zusammendrückung der im Piezometer befindlichen untersuchten Flüssigkeit herrühren können. Kennt man (durch vorausgegangene Aichung und Calibrirung) das Verhältniss des Volums v der Zusammendrückung ab zum ursprünglichen Volumen V der untersuchten Flüssigkeit und den angewendeten Druck R in Atmosphären, so gibt $\frac{v}{V} : R$ den sogenannten Coëfficienten der Zusammendrückung für den Druck einer Atmosphäre. Derselbe beträgt z. B. für Wasser ungefähr $\frac{1}{20000}$.

(**Gestalten der Flüssigkeit; Capillarität; Endosmose.**) In den Anfangsgründen der Physik*) wird gelehrt, dass ein in der Nähe der Flüssigkeitsoberfläche befindliches Theilchen nicht dieselbe freie Beweglichkeit besitzt, wie ein Theilchen im Innern der Flüssigkeit, indem es nicht wie ein solches nach allen Richtungen hin von gleichen Kräften beherrscht ist. Unter der Annahme, dass je zwei Flüssigkeitstheilchen, solange deren Entfernung nicht unter einem gewissen Grenzwerthe r liegt, anziehend, dann aber abstossend auf einander einwirken und dass über einen gewissen Grenzwerth R der Entfernung hinaus auch die Anziehung nicht mehr merklich ist, denkt man sich jedes Flüssigkeitstheilchen von einer sogenannten anziehenden

*) Siehe z. B. Ettingshausen's A. d. P. Seite 217 u. flgde.

und abstossenden Wirkungssphäre (beziehungsweise von den Halbmessern R und r) umgeben und weist durch einfache geometrische Betrachtungen nach, dass die Flüssigkeitstheilchen, deren Abstand unter der Oberfläche: $d \lessgtr \frac{R}{r}$, einen Zug nach einwärts erfahren, der mit zunehmender Convexität wächst (also bei einer convexen Oberfläche grösser als bei einer ebenen, bei dieser grösser als bei einer concaven ist), dass dagegen Flüssigkeitstheilchen, deren Abstand von der Oberfläche einen gewissen unter r herabgehenden Betrag erreicht, Repulsivkräfte nach auswärts erfahren. Es kommt daher bei Flüssigkeiten ausser dem gleichförmigen äusseren Drucke A auf die Flächeneinheit, welcher nach dem Gesetze des gleichen Druckes auch die sogenannte Pressung im Innern vorstellt und ausser der Schwerkraft noch ein sogenannter Cohäsionsdruck (auch Oberflächenspannung genannt) an der freien Oberfläche einer Flüssigkeit in Betracht, der für die Gestaltung derselben von Einfluss ist und mit dessen Untersuchung sich Laplace, Poisson und Gauss beschäftigt haben.

Bezeichnet man den Normaldruck auf die Flächeneinheit an einer bestimmten Stelle der freien Oberfläche mit P, so wird derselbe, wie Laplace gezeigt hat, durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$P = A + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 77)$$

wobei $\frac{B}{2}$ die sogenannte Cohäsionsconstante darstellt, während r_1 und r_2 die Krümmungsradien von zwei auf einander senkrechten Normalschnitten an der betrachteten Stelle bedeuten, gleichviel welcher, z. B. derjenigen, welche die grösste und kleinste Krümmung darbieten. Dabei ist zu bemerken, dass die Krümmungsradien positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem die Krümmung eine convexe oder concave ist.

Dieses Gesetz, welches, nebenbei gesagt, als eine Folgerung des Principes der virtuellen Bewegungen sich darstellen lässt, führt, in Verbindung mit dem bereits erwähnten Principe des gleichen Druckes (nämlich der allseitig gleichmässigen Fortpflanzung eines jeden auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckes) zur Erkenntniss, dass die Oberfläche einer freien Flüssigkeitsmasse sich so gestalten muss, dass jene Summe

der reciproken Werthe der Krümmungsradien für je zwei Punkte a und b (Fig. 70) der Oberfläche gleich ausfällt, dass also

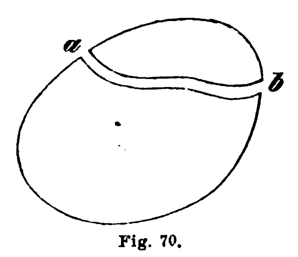


Fig. 70.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{Const.} \quad . \quad . \quad 78)$$

Denn man kann sich zwischen den betrachteten Punkten einen beliebigen Canal ab in der Flüssigkeit denken, längs dessen sich im entgegengesetzten Falle ein ungleicher Druck geltend machen und daher Bewegung eintreten müsste, was dem vorausgesetzten Gleichgewichtszustande widersprechen würde. Wir werden auf diese Art zur Kugelform hingeführt als derjenigen Gestalt, deren Oberfläche allenthalben gleiche Krümmungen darbietet und welche Gestalt demnach eine freie Flüssigkeit anzunehmen bestrebt ist. (Gesetz der Tropfenbildung.)

Weniger einfache Verhältnisse machen sich geltend, wenn die betrachtete Flüssigkeitsmenge mit festen Körpern in Berührung steht und sonach auch der Einwirkung anderer Molecularkräfte unterliegt. Bedingungen dieser Art sind z. B. bei den bekannten Plateau'schen Versuchen*) mit sogenannten schwerlosen Flüssigkeitsmassen (Oelmassen, welche im Innern eines specifisch gleich schweren Gemenges von Wasser und Weingeist freischwebend sich erhalten) gegeben, wenn diese Flüssigkeitsmassen durch Einführung von Drahtgerüsten sich in vorgezeichnete Formen zu schmiegen veranlasst werden. Bringt man z. B. eine im Innern einer gleich schweren Flüssigkeit frei schwebende Oelkugel zwischen die Ringe eines Drahtgerüstes (Fig. 71), so kann man die Oelmasse nach Massgabe

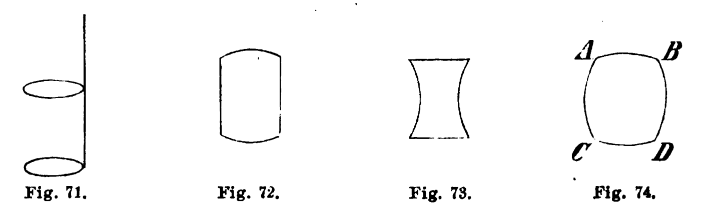


Fig. 71. Fig. 72. Fig. 73. Fig. 74.

ihrer Menge in eine der Formen, Fig. 72, 73 oder 74 (die letzteren aus der ersten Figur beziehungsweise durch Verminderung oder

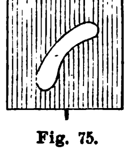
*) Vergleiche Mach, Compend. d. Physik für Mediciner.

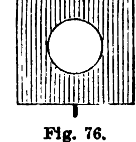
Vermehrung der Oelmenge hervorgebracht) bringen. Bezeichnen wir die Krümmungsradien der in Betracht kommenden Normalschnitte an der Mantelfläche mit r_1 und r_2, an der Basis mit r_1' und r_2', so ist das Gleichgewicht der besagten Flüssigkeitsgestalten an folgende Bedingungen gebunden: Für Fig. 72 ist $r_1 = \infty$, $r_2 =$ Radius des Drahtringes; $r_1' = r_2' = r'$, folglich vermöge Formel 78, d. i.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 79)$$

$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r'}$, also $r' = 2 r_2$; für Figur 73 erhalten wir: $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0$, somit $r_1 = r_2$; für Figur 74: $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r'}$, folglich $r' = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

Bei näherer Untersuchung der stabilen Gleichgewichtsgestalten einer Flüssigkeit findet man stets solche, bei welchen die Oberfläche (im Vergleiche zum Volum) ein Minimum ist. Dies erstreckt sich auch auf Flüssigkeitshäutchen. Ziehen wir z. B. aus einem würfelförmigen Drahtgerüste das Oel fort, so dass der Würfel endlich ganz auf ein Gebilde aus Flüssigkeitshäutchen zusammenschrumpft, so werden auch diese so angeordnet sein, dass ihre Flächensumme ein Minimum ist, d. h. den kleinsten mit dem gegebenen, damit bekleideten Drahtgerüste vereinbaren Werth hat. Sehr leicht lassen sich solche Häutchen mittelst einer Seifenlösung darstellen, in welche wir ein Drahtgerüste eintauchen, so auch einzelne Häutchen, indem wir allenfalls einen Kreis, ein Quadrat u. dergl., aus Draht gebildet, eintauchen. Legt man auf ein solches Häutchen (Fig. 75) eine aus einem sehr feinen Faden hergestellte Schlinge und nimmt das Häutchen innerhalb der Begrenzung dieser Schlinge fort, wie die Figur zeigt, so zieht sich das Häutchen in der Art auseinander, dass es die kleinste Oberfläche einnimmt, was dann der Fall sein wird, wenn die Schlinge einen Kreis (Fig. 76) bildet.*) (van der Mensbrugghe.)


Fig. 75.


Fig. 76.

*) Siehe: Mach, die Gestalten der Flüssigkeit.

Das Streben der Flüssigkeiten nach einem Minimum der Oberfläche erklärt sich aus der molecularen Anziehung der Flüssigkeitstheilchen, vermöge welcher sie einander so nahe als möglich zu kommen suchen.

Betrachten wir eine Flüssigkeit, welche aus einem Gefässe z. B. durch eine kreisförmige Oeffnung heraustritt, so ist der im ersten Momente sich bildende Flüssigkeitscylinder keine Gleichgewichtsgestalt. Die Folge davon ist ein Zerfallen des Flüssigkeitsstrahles, welchem zunächst immer stärkere Einschnürungen desselben (Fig. 77) vorausgehen. Die grösseren und kleineren Kugeln, aus welchen der zerfallene Flüssigkeitsstrahl zusammengesetzt erscheint, was man bei Beleuchtung durch elektrische Funken sehr deutlich zur Anschauung bringen kann, entsprechen beziehungsweise den grösseren und kleineren Querschnitten jener Einschnürungen.

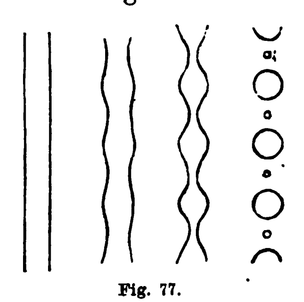


Fig. 77.

Die Einwirkungen, welche die Flüssigkeitstheilchen von Seite der Gefässwand erfahren, mit welcher sie in Berührung stehen, bedingen besondere Erscheinungen, welche man Haarröhrchenerscheinungen (Capillarphänomene) genannt hat, insofern die in engen Röhrchen beobachteten Wirkungen dieser Art von besonderer Wichtigkeit sind.

Es ist bekannt, dass die Oberfläche einer Flüssigkeit in der unmittelbarsten Nähe der Gefässwand nicht horizontal und eben erscheint, sondern entweder concav oder convex, nach Massgabe der Grössenverhältnisse unter den Molecularkräften, mit welchen einerseits die in Betracht kommenden Theilchen der Gefässwand und andererseits jene der Flüssigkeit auf die der Gefässwand zunächst liegenden Flüssigkeitstheilchen einwirken. Von diesen Grössenverhältnissen (welche in den Anfangsgründen der Physik ausführlicher erläutert werden) hängt es auch ab, ob zwischen dem Materiale der Gefässwand und der Flüssigkeit Benetzung stattfindet oder nicht. Ersteres ist stets von einer concaven, letzteres von einer convexen Gestaltung der Flüssigkeitsoberfläche in der Nähe der Gefässwand begleitet und es ist leicht einzusehen, dass in hinreichend engen Röhrchen die ganze Flüssigkeitsoberfläche in jene con-

cave oder convexe Krümmung einbezogen erscheinen muss. Communicirt das enge Röhrchen mit einem weiteren Gefässe, so ist die Concavität immer von einem höheren, die Convexität von einem tieferen Niveaustande der Flüssigkeit (beziehungsweise Elevation oder Depression genannt) begleitet und es verhalten sich diese Niveaudifferenzen verkehrt wie die Durchmesser der angewendeten engen Röhrchen. Wir wollen nun sehen, wie dieses bekannte Gesetz der Capillarwirkung sich aus unserem allgemeinen Ausdrucke für die Oberflächenspannung herleiten lässt. Zunächst ist einleuchtend, dass in einem cylindrischen Röhrchen die zwei Normalschnitte der Flüssigkeitsoberfläche gleiche Krümmungsradien haben werden und demnach die Oberflächenspannung

$$P = A \pm \frac{B}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80)$$

sein wird, wenn wir in der allgemeinen Formel 77 $r_1 = r_2 = r$ setzen und das obere Zeichen für eine konvexe, das untere für eine konkave Krümmung gelten lassen. Die Oberflächenspannung ist also im ersten Falle um den Betrag $\frac{B}{r}$ grösser, im zweiten Falle um diesen Betrag kleiner als bei ebener Flüssigkeitsoberfläche, woraus die Nothwendigkeit einer Depression im ersten und einer Elevation im zweiten Falle ohne weitere Erläuterung hervorgeht. Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen Röhrendurchmesser und Capillarwirkung beachten wir Folgendes.

Wir betrachten beispielsweise den Fall einer convexen Oberfläche (Fig. 78), deren Radius AO (wir können die Flüssigkeitsoberfläche in Capillarröhrchen als sphärisch ansehen) r heissen soll, so dass wir also für den Betrag der Oberflächenspannung $P = A + \frac{B}{r}$ erhalten. Die im Berührungspunkte mit der Gefässwand bei A an die Kuppe gelegte Tangente (in einer durch A und die Röhrenaxe gelegten Ebene) bildet mit der Gefässwand den sogenannten Randwinkel ϑ *) und es erhellet aus der Zeichnung, dass

Fig. 78.

*) Derselbe ist eine nur von der Beschaffenheit der Gefässwand und der Flüssigkeit abhängige (also von Röhrenweite u. s. w. unabhängige) Constante.

der Halbmesser des Rohres $AB = \varrho = r \cos\vartheta$ ist, somit

$$r = \frac{\varrho}{\cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 81)$$

welcher Werth in die Formel für die Oberflächenspannung eingeführt $P = A + \frac{B \cos\vartheta}{\varrho}$ ergibt. Da nun $B \cos\vartheta$ das Product zweier Constanten ist, so ist sofort ersichtlich, dass die dem Ausdrucke $\frac{B \cos\vartheta}{\varrho}$ proportionale Depression im verkehrten Verhältnisse stehen muss mit dem Halbmesser ϱ der Röhre. Auf dieselbe Art ergibt sich die verkehrte Proportionalität einer Elevation mit der Weite des Rohres. Die Capillarwirkungen bedingen eine grosse Anzahl von mitunter höchst wichtigen Erscheinungen, die theils für's praktische Leben, theils für gewisse Processe im Leben der Thiere und Pflanzen von grossem Belang sind.

Die Haarröhrchenwirkungen können auch unter anderen als den hier speciell betrachteten Bedingungen beobachtet werden und es mögen einige Beispiele dieser Art hier Platz finden:

Befindet sich eine kleine Flüssigkeitsmenge in einem konischen Capillarrohre, so wird die beiderseitige Krümmung ungleich, somit auch die beiderseitige Oberflächenspannung a und b ungleich sein. Im Falle der Concavität (Fig. 79) ist

a b

Fig. 79.

a b

Fig. 80.

nach dem Gesagten $b > a$ und die Flüssigkeit muss gegen den engeren Theil des Rohres sich bewegen (z. B. Wasser in einer Glasröhre); findet keine Benetzung also Convexität (Fig. 80) statt (Quecksilber in einer Glasröhre), so tritt wegen $a > b$ eine Bewegung gegen den weiteren Theil des Rohres hin ein. (Die Erklärung ergibt sich ohne Schwierigkeit durch Anwendung der Formeln 81 und 80.)

Taucht man in eine Flüssigkeit zwei parallele, gleichartige und ebene Platten, so erscheint die Flüssigkeitsoberfläche cylindrisch, concav oder convex gekrümmt. Wir wollen beispielsweise das erstere annehmen, und berücksichtigen, dass dem durch die Cylinderaxe gelegten Normalschnitte der Flüssigkeitsoberfläche der Radius ∞, dem darauf senkrechten dagegen

ein Radius $r = \frac{d}{2 \cos \vartheta}$ entspricht, wenn d die Distanz der Platten und ϑ den Randwinkel bedeutet. Für die Oberflächenspannung erhalten wir in diesem Falle $P = A - \frac{B}{2r} = A - \frac{B \cos \vartheta}{d}$; demnach äussert die ebene Flüssigkeitsoberfläche ausserhalb des Plattenpaares den Ueberdruck $\frac{B \cos \vartheta}{d}$, der die entsprechende Elevation zwischen den Platten bewirkt, die im Vergleiche mit jener in einem cylindrischen Rohre (siehe Formel 80) offenbar den halben Betrag hat, wenn Plattendistanz und Röhrendurchmesser gleich sind.*) Denkt man sich die Platten beweglich und bringt man mit gehöriger Berücksichtigung der eben vorgetragenen Formeln die Kräfte in Rechnung, welche an den (ebenen) Berührungsflächen zwischen Platte und Flüssigkeit zur Geltung konmen, so findet man ohne Schwierigkeit, dass die beiden Platten gegeneinander gedrückt werden; es mag zwischen denselben Elevation oder Depression stattfinden. Hierauf lassen sich zurückführen: Die scheinbare Anziehung schwimmender Körper; das Zusammenkleben von nassen Blättern und Haaren; die Erscheinung, dass die Bläschen an der Oberfläche einer schäumenden Flüssigkeit aneinander rücken und an die Gefässwand sich hinziehen u. s. w.

Mit den Capillarerscheinungen nahe verwandt sind die Erscheinungen der Endosmose, des Austausches zwischen Flüssigkeiten, welche durch eine poröse Wand getrennt sind. (Man hat das Ein- und Austreten der Flüssigkeiten bei solcher Anordnung früher mit den Worten Endosmose oder Exosmose unterschieden.) Um Beispiele anzuführen, sei erinnert, dass ein solcher Austausch zwischen Wasser und Weingeist, welche durch eine thierische Membran getrennt sind, in der Weise stattfindet, dass mehr Wasser zum Weingeist als umgekehrt übergeht, während das Entgegengesetzte stattfindet, falls die Flüssigkeiten durch eine Kautschukmembrane getrennt sind. Was die Erklärung dieser Erscheinungen betrifft, dürfte die von Brücke gegebene im Wesentlichen die richtige sein, die auf folgenden Grundansichten beruht.

Bringt man auf eine Glasplatte z. B. Baumöl und Terpentinöl, so gewahrt man, dass ersteres von letzterem, welches

*) $d = 2\varrho$; siehe die Erläuterung nach Formel 81.

eine stärkere Adhäsion zu Glase äussert, verdrängt wird, und wenn ein Gemenge der beiden Flüssigkeiten auf die Glasplatte kommt, tritt eine solche Anordnung ein, dass die Flüssigkeitsschichten gegen das Glas hin immer mehr Terpentinöl enthalten, die von dem Glase entfernteren Schichten dagegen in entsprechendem Masse reicher an Baumöl sind. Diese Thatsache lässt annehmen, dass, wenn wir die beiden genannten Flüssigkeiten durch einen engen Canal mit einander communiciren liessen, ein Austausch in der Art stattfinden würde, dass das Terpentinöl vornehmlich an der Wand des Canals, das Baumöl dagegen vorwiegend in der Axe desselben und zwar beide Flüssigkeiten in entgegengesetzter Richtung sich bewegen. Eine solche Anordnung würde zugleich mit sich bringen, dass mehr Terpentinöl in der einen Richtung als Baumöl in der entgegengesetzten Richtung übergeführt wird. Ebenso würde in anderen ähnlichen Fällen von vornherein abzusehen sein, dass von derjenigen Flüssigkeit, deren Adhäsion zum Materiale des Verbindungscanals grösser ist, mehr übergeht, als im entgegengesetzten Sinne von der andern Flüssigkeit, und da dies selbstverständlich auch für ein System von sehr vielen feinen Canälen, wie sie eine poröse Scheidewand darbietet, Geltung hat, so lassen sich aus dieser Annahme eben auch die Erscheinungen herleiten, die wir unter solchen Umständen thatsächlich beobachten.

(**Niveauflächen.**) Bei der Beurtheilung des Druckes, der im Innern einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit an einer bestimmten Stelle stattfindet, kommen nicht nur die auf die äusseren Grenzflächen der Flüssigkeit einwirkenden Druckkräfte (z. B. Atmosphärendruck, Druck eines Stempels u. dergl.) in Betracht, sondern auch die auf die einzelnen Flüssigkeitsmoleküle einwirkenden beschleunigenden Kräfte (wie z. B. die Schwerkraft). Der Druck im Innern einer Flüssigkeit wird daher, obgleich in jedem Punkte nach allen Richtungen gleich (Gesetz des gleichen Druckes), doch im Allgemeinen von Punkt zu Punkt verschieden, d. i. eine Function der Coordinaten des betrachteten Punktes sein.

Wirkt z. B. auf ein unendlich kleines Flüssigkeitsparallelopiped (Fig. 81), dessen den Coordinatenaxen Ox, Oy und Oz parallele Kanten dx, dy und dz sein mögen, an der oberen Grenzfläche $dxdy$ der Druck $pdxdy$ (Pfeil 1), wobei p den

an dieser Stelle herrschenden auf die Flächeneinheit reducirten Druck bedeutet, so wird an einer um dz tieferen Stelle ein anderer Druck $p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ auf die Flächeneinheit, somit z. B. auf die untere Grenzfläche $dx\,dy$ des betrachteten Parallelopipedes der Druck $\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx\,dy$ stattfinden (Pfeil 2), so dass ein Ueberdruck nach aufwärts vom Betrage $\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$ vorhanden ist. — Soll Gleichgewicht bestehen, so muss diese der z-Axe parallele Druckdifferenz kompensirt sein durch die gleichfalls der z-Axe parallele Componente des auf das betrachtete Flüssigkeitsparallelopiped wirkenden (etwa von anziehenden Kräften herrührenden) Beschleunigungsdruckes. Dieser kann durch $\varrho\,dx\,dy\,dz \cdot Z$ vorgestellt werden, wenn ϱ die Masse der Volumseinheit und Z die der z-Axe parallele Beschleunigungscomponente bedeutet. In dem speciellen Falle, dass nur die Schwerkraft als Beschleunigungsdruck auf die Massen-Elemente der Flüssigkeit einwirkte, wäre $Z = g$ (= 9,81) die einzige hier in Betracht kommende Druckcomponente. Wenn wir jedoch unsere Untersuchung nicht auf diesen speciellen Fall beschränken, so werden im Allgemeinen auch noch bezüglich der beiden anderen Coordinatenaxen Druckcomponenten X und Y zu berücksichtigen sein. Aus dem Gesagten, dass nämlich $\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \varrho\,dx\,dy\,dz \cdot Z$ sein muss, folgt nun zunächst $\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho Z$; und analoge Gleichungen ergeben sich sofort auch bezüglich der beiden anderen Axen, so dass wir als Gleichgewichtsbedingungen

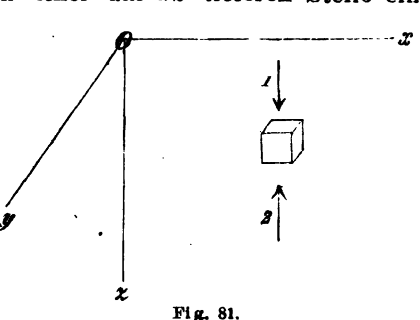


Fig. 81.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \varrho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \varrho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \varrho Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 82)$$

erhalten; oder, wenn wir die erste Gleichung mit dx, die zweite

mit dy, die dritte mit dz multipliciren, sodann addiren und $\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp$ setzen

$$dp = \varrho(X dx + Y dy + Z dz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 83)$$

eine Gleichung, die wir gelegentlich auch in der Form

$$dp = \varrho \cdot du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84)$$

schreiben wollen, insofern wir $X dx + Y dy + Z dz$ als ein vollständiges Differentiale ansehen können. Diese Gleichung gibt die Aenderung des Druckes an, der man begegnet, wenn man in der Flüssigkeit von einem Punkte M zu einem anderen Punkte M' übergeht, im Abstande $MM' = ds$, dessen Projectionen auf die drei Coordinatenaxen beziehungsweise dx, dy, dz sind.

Würde man aber nur jene Punkte in's Auge fassen, in welchen der gleiche Druck p herrscht, wie in M, so wäre der geometrische Ort derselben, eine Fläche gleichen Druckes, bestimmt durch die Gleichung $p = f(x, y, z) =$ Const., folglich

$$dp = \varrho(X dx + Y dy + Z dz) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85)$$

oder

$$dp = \varrho du = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86)$$

wobei in diesem Falle ($du = 0$) auch u constant sein muss.

Die Gleichungen 85) und 86) sind demnach die allgemeinen Differentialgleichungen für die Flächen gleichen Druckes, die wir künftighin Niveauflächen nennen wollen, weil offenbar auch die freie Oberfläche einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit eine Fläche gleichen Druckes sein muss.

Die Gleichungen 85) und 86) sagen eben aus, dass man keiner Druckänderung ($dp = 0$) begegnet, wenn der Weg $MM' = ds$ von einem Flüssigkeitstheilchen zum anderen, dessen Projectionen auf die Axen dx, dy und dz sind, in einer Niveaufläche liegt.

Bei ungleichförmigen Flüssigkeiten (z. B. Gemischen von Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes) oder bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten, in welchen die Dichte ϱ vom Drucke p abhängt, wird die Dichte ϱ im Innern der Flüssigkeit im Allgemeinen auch von Punkt zu Punkt verschieden, d. h. eine Funktion der Coordinaten des betrachteten Punktes sein. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die Flächen

gleichen Druckes beim Gleichgewichtszustande auch Flächen gleicher Dichte sind.

Fasst man nämlich die der Gleichgewichtsbedingung $dp = \varrho du$ (Formel 84) entsprechenden Werthe von p*) in's Auge, die sonach aus der Integralgleichung

$$p = \int \varrho du + \text{Const.} \quad \ldots\ldots \quad 87)$$

hervorgehen müssen, so setzt dies eben die Ausführbarkeit der Integration $\int \varrho du$ voraus, setzt also voraus, dass ϱ eine Funktion von u sein. Ist also u constant, was zutrifft, wenn p constant ist, nämlich für jede Niveaufläche, so ist auch ϱ constant.

Das Gleichgewicht erfordert also eine solche Schichtung (Fig. 82) der Flüssigkeit, dass zwischen je zwei der Druckdifferenz dp entsprechend aufeinanderfolgenden Niveauflächen gleichförmige Dichte herrscht. Soll das Gleichgewicht stabil sein, so muss, insofern wir beispielsweise eine von der Schwerkraft beherrschte Flüssigkeit betrachten, der Schwerpunkt die möglichst tiefe Stellung haben, das heisst die Schichten müssen nach oben mit abnehmender Dichte gelagert sein.

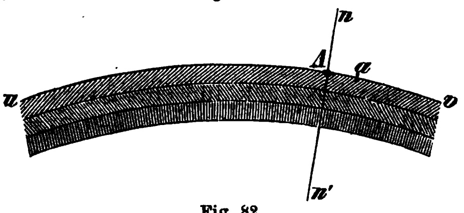


Fig. 82.

Zur Charakteristik der Niveauflächen erübrigt uns noch zu zeigen, dass in jedem Punkte A einer solchen Fläche uv (Fig. 82) die Richtung der Totalbeschleunigung R (deren Componenten wir eben mit X, Y und Z bezeichnet haben) mit der Normale nn' im betrachteten Punkte A zusammenfällt. Zu dem Ende ziehen wir in der Niveaufläche uv eine beliebige Curve durch den Punkt A und betrachten ein Element $Aa = ds$ derselben, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds \cos\alpha' \\ dy &= ds \cos\beta' \\ dz &= ds \cos\gamma' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 88)$$

*) Ist z. B. bei einer schweren Flüssigkeit $Z = g$, $X = Y = 0$ und an der in der xy-Ebene angenommenen Oberfläche der Atmosphärendruck P wirksam, so hätte man $p = g\int \varrho dz + \text{Const.}$ und wegen $p = P$ für $z = 0$, offenbar Const. $= P$.

sein werden, wenn α', β' und γ' die Winkel bedeuten, unter welchen die Richtung von ds gegen die Coordinatenaxen geneigt ist. Sind α, β und γ diese Neigungswinkel für die Richtung der Totalbeschleunigung R, also

$$\left.\begin{aligned} X &= R\cos\alpha \\ Y &= R\cos\beta \\ Z &= R\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 89)$$

in welchem Falle die Richtungen von R und ds miteinander einen Winkel φ bilden, der bekanntlich durch die Gleichung

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \quad . \ . \quad 90)$$

gegeben ist, so erhält man $\cos\varphi = \frac{X}{R}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{dz}{ds}$ oder

$$R\cos\varphi\, ds = X dx + Y dy + Z dz \quad . \ . \ . \quad 91)$$

welcher Ausdruck für eine Niveaufläche nach Formel 85 gleich Null ist. Es ist somit $\cos\varphi = 0$ und, da dasselbe für jedes von A aus in der Niveaufläche gezogene ds gezeigt werden kann, die Richtung der Totalbeschleunigung R normal im Punkte A.

(**Hydrostatischer Druck.**) Der Satz vom hydrostatischen Drucke, wie er in den Elementen der Physik gelehrt zu werden pflegt, bedarf einer Erweiterung für den Fall, dass der ebene Theil der Gefässwand, für welchen der darauf ausgeübte Druck der Flüssigkeit berechnet werden soll, nicht horizontal ist, sondern beliebig geneigt, wie z. B. AB (Fig. 83). Denkt man sich dieses ebene Flächenstück AB, dessen Inhalt wir mit f bezeichnen wollen, in unendlich viele entsprechend kleine Flächenelemente φ zerlegt, so dass $f = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_r + \cdots + \varphi_n$ und bezeichnet die Abstände dieser Flächenelemente vom Flüssigkeitsniveau beziehungsweise mit h_1, $h_2 \cdots h_r \cdots h_n$ (wobei es wegen der Kleinheit der Flächenelemente natürlich gleichgiltig ist, von welchem Punkte derselben aus man sich diesen Abstand gemessen denkt), so wird der auf ein beliebiges derselben, z. B. φ_r entfallende hydrostatische Druck offenbar durch $\varphi_r \cdot h_r \cdot s$ dargestellt werden, wenn s das specifische Gewicht der Flüssigkeit vorstellt. Somit wird für den

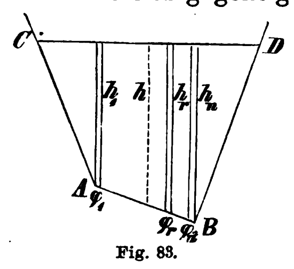


Fig. 83.

Gesammtdruck p auf die Fläche f die Gleichung gelten müssen $p = s(\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \cdots \varphi_r h_r + \cdot\cdot + \varphi_n h_n)$. Denken wir uns die Fläche AB für einen Augenblick als eine gleichförmig mit Masse belegte Ebene, so dass also die φ entsprechende Massenelemente der Masse f vorstellen, so gilt nach Satz 14 die Relation $\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \cdot + \varphi_r h_r + \cdots\cdot + \varphi_n h_n = h_0 \Sigma \varphi = h_0 \cdot f$, wenn wir mit h_0 den Abstand des Schwerpunktes der Fläche AB vom Flüssigkeitsniveau bezeichnen. Wir gewinnen auf diese Art die Gleichung

$$p = s \cdot f \cdot h_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 92)$$

deren Sinn sich leicht in Worte kleiden lässt.

(**Aräometer; Pyknometer.**) Wenn p das Gewicht eines Körpers ist, v das eingetauchte Volumen und s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist nach dem Archimedischen Gesetze bekanntlich

$$p = vs \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 93)$$

die Bedingung des Gleichgewichtes oder beziehungsweise $p = v's'$, wenn wir den Körper in einer andern Flüssigkeit einsinken lassen, in welcher er ein entsprechend verändertes Einsenkungsvolumen zeigen wird. Dieses letztere gestattet, wenn wir es durch eine passende Form des schwimmenden Körpers leicht vergleichbar machen, mittelst der Proportion

$$s : s' = v' : v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 94)$$

einen Schluss auf das Verhältniss der specifischen Gewichte der Flüssigkeiten und darin besteht das Princip der sogenannten Scalenaräometer; die sogenannten Gewichtsaräometer dagegen beruhen darauf, dass man einen Schwimmer entsprechend belasten muss, wenn er in einer dichteren Flüssigkeit ebenso tief einsinken soll, als in einer weniger dichten. Ist nämlich p_1 die Belastung (Zulagegewicht) des in der Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s_1 schwimmenden Instrumentes vom Gewichte P, und V das Einsenkungsvolumen, also $P + p_1 = Vs_1$ (nach Formel 93) und ebenso für eine andere Flüssigkeit $P + p_2 = Vs_2$, wenn wir eben die Belastung p_2 so gewählt haben, dass das Instrument ebenso tief wie früher einsinkt, so erfahren wir hieraus mittelst der Gleichung

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{P + p_1}{P + p_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 95)$$

das Verhältniss der specifischen Gewichte. — Vorwiegend von Belang sind für uns die Scalenaräometer, deren man bekanntlich solche mit theoretischen und solche mit willkürlichen Scalen unterscheidet. Erstere geben entweder unmittelbar die Dichten an (Brisson, Schmidt) oder gestatten eine sehr einfache Berechnung derselben aus der Ablesung am Instrumente (Gay-Lussac), letzteren liegt ein willkürliches Eintheilungsprincip zu Grunde, indem der Abstand (Fundamentalabstand) der Einsenkungspunkte (Fundamentalpunkte) für beliebig gewählte Flüssigkeiten verschiedener Dichte (Normalflüssigkeiten) in eine willkürliche Zahl von Unterabtheilungen eingetheilt wird, aus deren Ablesung die Dichte einer untersuchten Flüssigkeit nicht unmittelbar entnommen, sondern nur mittelst weniger einfacher Reductionsformeln, statt deren man lieber ein für alle Mal gerechnete Tabellen benutzt, abgeleitet werden kann (Beaumé, Beck, Cartier u. A.).

Die Scala des Gay-Lussac'schen Aräometers (Fig. 84) ist so eingerichtet, dass das zwischen je zwei auf einander folgenden Theilstrichen enthaltene Stück des Halses dem Rauminhalte nach gerade dem hundertsten Theile des Einsenkungsvolums in Wasser gleichkommt; der Wasserpunkt wird desshalb mit 100 bezeichnet und die Nummerirung entsprechend fortgesetzt, so dass also z. B. dem Einsenkungspunkte 80 eine Dichte $\frac{100}{80}$, allgemein der Ablesung z eine Dichte

$$d = \frac{100}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96)$$

entsprechen würde.

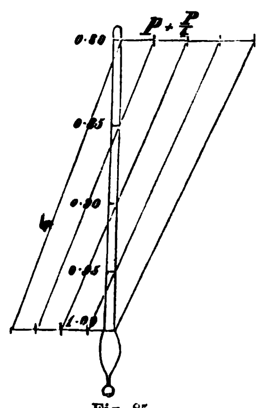
Fig. 84.

Weil die Ablesung z bei diesem Instrumente eigentlich ein Volumen bedeutet, so hat man es auch Volumeter genannt. So einfach die angedeutete Rechnung auch ist, so hat man sie doch durch Anbringung von Scalen, welche die bereits ausgerechneten Dichten angeben, vermieden. Eine Scala der letzteren Art kann, wie man durch Differentiation der Gleichung 96 leicht findet, wenn sie um gleiche Differenzen der Dichte fortschreiten soll, nicht gleiche Intervalle haben, sondern die Theilstriche müssen vielmehr nach oben immer weiter auseinanderrücken. Man nennt solche unmittelbar die Dichte anzeigende Aräometer auch Densimeter. Die Er-

mittelung der den verschiedenen Dichten entsprechenden Scalenpunkte kann nach Brisson durch entsprechend vermehrte oder verminderte Belastung des Instrumentes (durch Zulegen zur Normalbelastung oder Wegnahme von derselben, so lange das Instrument oben noch nicht geschlossen ist) geschehen. Sind s_1 und s die specifischen Gewichte des Wassers und einer anderen Flüssigkeit, v_1 und v die betreffenden Einsenkungsvolumina beim normalen Gesammtgewichte P des Instrumentes, also $P = v_1 s_1 = vs$, so muss P um einen gewissen Betrag p vermehrt oder vermindert werden, wenn das Instrument in Wasser ebenso tief wie in der zweiten Flüssigkeit einsinken soll, je nachdem $s \lessgtr s_1$ ist. Es muss nämlich im ersten Falle $P + p = vs_1$, im zweiten $P - p = vs_1$ gemacht werden.*) Durch Division mit $P = vs$ erhält man im ersten Falle

$$p = P\left(\frac{s_1}{s} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97)$$

welcher Ausdruck im zweiten Falle negativ wird. Auf diese Art lassen sich leicht die Belastungen berechnen, mit welchen das Instrument in Wasser ebenso tief einsinkt wie in anderen Flüssigkeiten von bestimmtem specifischem Gewichte und somit auch die betreffenden Einsenkungspunkte durch Beobachtung des entsprechend belasteten Instrumentes in Wasser ermitteln, ohne dass man nöthig hätte, von einer Reihe von Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes wirklich Gebrauch zu machen.


Fig. 85.

Eine bedeutende Abkürzung dieses Brisson'schen Verfahrens ist von G. G. Schmidt (Giessen) angegeben worden. Das Wesentliche dieser Methode wird aus folgendem Beispiele erhellen. Es stelle Fig. 85 das mit einer Scala zu versehende Aräometer vor, von dem wir annehmen wollen, dass sein Hals, soweit die ganze zu construirende Scala reicht, genau

*) Natürlich hat v in beiden Fällen ungleiche Werthe, nämlich $v \gtrless v_1$, wenn $s \lessgtr s_1$.

cylindrisch sei. Unter dieser Voraussetzung würde es genügen, die zwei äussersten Punkte der Scala nach der Brisson'schen Methode zu ermitteln, z. B. entsprechend den Dichten 1,00 und 0,80. Um sodann die Unterabtheilungen zu finden, errichte man in den Theilungspunkten entgegengesetzt gerichtete Perpendikel auf eine der Axe des Instrumentes parallele Linie der Scala, deren Längen sich wie die Gewichte $\left(\text{hier } P \text{ und } P + \frac{P}{4}\right)$ verhalten, welche Formel 97 im gegebenen Falle liefert. Theilt man jedes dieser Perpendikel in so viele gleiche Theile, als die Scala Unterabtheilungen enthalten soll und zieht die in der Zeichnung angedeuteten Transversalen, so geben die Durchschnittspunkte derselben mit der Verbindungslinie der Fusspunkte jener Perpendikel die gewünschten Scalenpunkte, entsprechend den in der Zeichnung beigeschriebenen Dichten. Kann der Hals des Aräometers nicht in der ganzen Ausdehnung als genau cylindrisch gelten, so wird man eben mehrere Fundamentalpunkte direct bestimmen und deren Intervalle in der eben beschriebenen Weise eintheilen müssen. Ebenso nahe liegend ist das Verfahren bei der Construction einer Scala für schwerere Flüssigkeiten als Wasser.

Die theoretische Begründung des beschriebenen Verfahrens erhellet aus folgenden Erwägungen. Es seien AA' und BB' (Fig. 86) den Gewichten $v_2 s_1$ und $v_1 s_1$ (wobei v_2 und v_1 die Einsenkungsvolumina bedeuten) proportional, die das Instrument haben muss, um im Wasser, dessen specifisches Gewicht s_1 sein soll, das eine Mal bis A, d. i. ebenso tief wie im unbelasteten Zustande in einer Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s_2, das andere Mal bis B, d. i. bis zum Wasserpunkte, der eben diesem unbelasteten Zustande entspricht, einzusinken. Man habe ferner AA' und BB' in je n gleiche Theile getheilt, und es sei $Aa = \frac{m}{n} AA'$ und $Bb = \left(\frac{n-m}{n}\right) BB'$. Verbindet man sodann a und b, wodurch $\frac{AC}{BC} = \frac{Aa}{Bb}$ wird, so muss mit Rücksicht auf

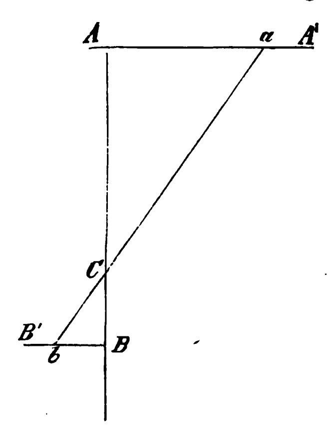


Fig. 86.

die soeben vorausgeschickte Beziehung $\frac{Aa}{Bb} = \frac{mv_2}{(n-m)v_1}$ auch $\frac{AC}{BC} = \frac{mv_2}{(n-m)v_1}$ sein. Der durch die angegebene Construction bezeichnete Einsenkungspunkt C, einem Einsenkungsvolumen v entsprechend, bezieht sich auf ein specifisches Gewicht, welches einstweilen x heissen mag und von welchem gezeigt werden soll, dass es kein anderes ist als $s = s_2 + \frac{m}{n}(s_1 - s_2)$, wie es unser im vorhergehenden Beispiele (Fig. 85) erläuterter Lehrsatz verlangt.

Da C dem Einsenkungsvolumen v entspricht, hat man zunächst $\frac{AC}{BC} = \frac{v_2 - v}{v - v_1} = \frac{\frac{1}{s_2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{s_1}} = \frac{x - s_2}{s_1 - x} \cdot \frac{s_1}{s_2}$. Andererseits folgt aber aus $s = s_2 + \frac{m}{n}(s_1 - s_2)$, dass $\frac{m}{n-m} = \frac{s - s_2}{s_1 - s}$ ist, somit wird $\frac{AC}{BC}$, welches nach dem Vorhergehenden auch $= \frac{m}{n-m} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{n-m} \cdot \frac{s_1}{s_2}$ gesetzt werden kann, auch durch den Ausdruck $\frac{s - s_2}{s_1 - s} \cdot \frac{s_1}{s_2}$ darzustellen sein. Die Vergleichung beider Ausdrücke für $\frac{AC}{BC} = \frac{x - s_2}{s_1 - x} \cdot \frac{s_1}{s_2} = \frac{s - s_2}{s_1 - s} \cdot \frac{s_1}{s_2}$ lässt nun sofort erkennen, dass $x = s$ sein muss, d. i. gleich dem specifischen Gewichte, für welches man den entsprechenden Scalenpunkt bestimmen wollte. Auf ähnliche Weise lässt sich der Beweis führen, wenn $s_2 > s_1$ ist.

Die Prüfung der Richtigkeit von Aräometern mit theoretischer Scala geschieht am besten durch Controlversuche mit einer hydrostatischen Wage, z. B. der später zu besprechenden Mohr'schen.

Hinsichtlich der Aräometer mit willkürlichen Scalen wollen wir uns auf die Angabe der Formeln beschränken, welche zur Umrechnung der willkürlichen Aräometergrade auf die Dichten oder zur Berechnung dazu geeigneter Tabellen dienen können, sowie auch zur Controle der letzteren. Bezeichnet V das Volumen bis zum unteren Fundamentalpunkte für eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s_1 und entspricht das Intervall zweier Theilstriche z. B. dem $m$ten Theile des besagten Volumens, so wird, wenn bis zum oberen Fundamentalpunkte für

eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s_2 die Zahl der Unterabtheilungen $= n$ ist, das Einsenkungsvolumen für diese Flüssigkeit offenbar $V\left(1 + \frac{n}{m}\right)$ sein und die Gleichung bestehen $Vs_1 = V\left(1 + \frac{n}{m}\right)s_2$ oder $s_1 = \left(1 + \frac{n}{m}\right)s_2$; ebenso findet man, wenn z. B. r Intervalle bis zum Einsenkungspunkte für eine beliebige andere Flüssigkeit vom specifischen Gewichte x sind, $s_1 = \left(1 + \frac{r}{m}\right)x$. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Elimination von m sofort die Formel

$$x = \frac{n \cdot s_1 \cdot s_2}{ns_2 + r(s_1 - s_2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 98)$$

Beim Beaumé'schen Aräometer für schwerere Flüssigkeiten ist $n = 15$, $s_1 = 1{,}116$, $s_2 = 1$. Sinkt dasselbe also in irgend einer Flüssigkeit bis zum Theilstriche a, von oben (dem Nullpunkte) aus gezählt, so ist das von unten gezählte r offenbar $= 15 - a$ und man erhält für dieses Aräometer

$$x = \frac{144}{144 - a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 99)$$

Für das Beaume'sche Aräometer für leichtere Flüssigkeiten findet man dagegen, da der Wasserpunkt mit 10 bezeichnet ist, auf ähnliche Weise

$$x = \frac{144}{134 + a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 100)$$

wenn a die Ablesung bedeutet.

Für das Beck'sche Aräometer gilt

$$x = \frac{170}{170 \pm a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 101)$$

je nachdem es für leichtere oder schwerere Flüssigkeiten bestimmt ist.

Die Gewichtsaräometer setzen wir als hinlänglich bekannt voraus. Desgleichen verweisen wir hinsichtlich der sogenannten besonderen Aräometer, z. B. Alkoholometer, Saccharometer, Soolwagen u. s. w., theils auf ausführlichere elementare Lehrbücher, theils auf physikalische oder chemische Wörterbücher. Dasselbe gilt hinsichtlich der Vorsichtsregeln u. s. w. beim Gebrauche der Aräometer. Dagegen sei in Kürze noch das Princip der sogenannten Gravimeter erwähnt, welche gewissermassen die Construction des Gewichtsaräometers mit der Einrichtung eines Scalenaräometers ver-

einigen, indem deren entsprechend dick angefertigter Hals mit einer Scala versehen ist, die bei der Dichtebestimmung fester Körper in der Weise dient, dass man, anstatt Gewicht und Gewichtsverlust des untersuchten Körpers durch Gewichte auszugleichen, an der Scala des Halses die Differenzen der Einsenkungsvolumina abliest, welche durch Auflegen des Körpers zuerst in's obere und hierauf in's untere Schälchen hervorgebracht werden. Ist der Hals cylindrisch und sind die Intervalle gleich, so gibt die Division der dem Gewichte des Körpers und dem Gewichtsverluste entsprechenden Einsenkungsdifferenzen sofort die gesuchte Dichte.

Das Pyknometer (in einer älteren Form als sogenanntes Tausendgranfläschchen*) bekannt) dient gleichfalls zur Dichtebestimmung flüssiger Körper und zwar durch Abwägen gleicher Volumina der zu vergleichenden Flüssigkeiten. Wir setzen übrigens die Einrichtung und den Gebrauch dieses kleinen Instrumentes als bekannt voraus.

(**Hydrostatische Wage.**) Dieselbe hat eine für die Dichtebestimmungen von Flüssigkeiten sehr geeignete Einrichtung von Mohr in Coblenz erhalten, die wir (mit Beziehung auf ein von Westphal in Celle ausgeführtes Exemplar) kurz erläutern wollen. Wir schicken voraus, dass der Einrichtung das Princip der Berzelius'schen Laufgewichte, der sogenannten Milligrammhaken, (d. i. zum Auswägen von Milligrammen dienender längs des Wagebalkens verschiebbarer Centigrammhäkchen) zu Grunde liegt. Der Einsenkkörper *K* (Fig. 87) (zugleich als Thermometer dienend) erfährt im Wasser einen Gewichtsverlust, der durch den sogenannten Ausgleichungshaken *A* ausgeglichen wird, wenn derselbe am Ende des Wagebalkens hängt.

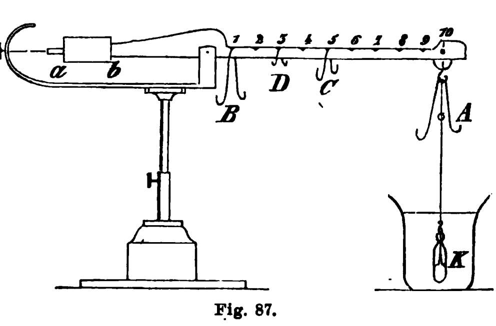


Fig. 87.

*) d. i. von Wasser gerade 1000 Gran, von anderen Flüssigkeiten im Verhältnisse ihrer Dichten entsprechende andere Gewichtsmengen bei einer bestimmten Temperatur fassend.

Ist die Flüssigkeit, in welcher sich der Einsenkkörper befindet, dichter als Wasser, so wird der Wagebalken noch mit anderen Drahthaken beschwert, deren man einen vom gleichen Gewichte wie der Ausgleichungshaken (*B*), einen von $\frac{1}{10}$ (*C*) und einen von $\frac{1}{100}$ dieses Gewichtes (*D*) vorräthig hat. Die Anwendung dieser Haken erläutert ein Blick auf die Zeichnung, welche darstellt, wie die Wage bei Untersuchung einer Flüssigkeit von der Dichte 1,153 in's Gleichgewicht gesetzt ist. Eine auf dem Principe der Neigungswagen beruhende Wage zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten ist unter dem Namen Tangentialwage von Professor Zenger construirt worden.

(**Ausflussgeschwindigkeit; hydrodynamischer Druck.**) Bei der theoretischen Untersuchung der Bewegungsgesetze von Flüssigkeiten in Röhrenleitungen pflegt man von gewissen Voraussetzungen auszugehen, die wir zunächst in Kürze erwähnen wollen. Die eine, das Princip des Parallelismus der Schichten genannt, geht dahin, dass alle in Bewegung begriffenen Flüssigkeitsschichten (Fig. 88) in jedem Querschnitte gleiche Geschwindigkeit haben, was in Wirklichkeit allerdings nicht genau zutrifft; die andere Voraussetzung, das Princip der Continuität der Flüssigkeit genannt, folgert aus der Thatsache des ununterbrochenen Zusammenhanges einer in einer Röhrenleitung von ungleichen Querschnitten strömenden Flüssigkeit die verkehrte Proportionalität der stellenweise vorkommenden Geschwindigkeiten V und v mit den Querschnitten Q und q (Fig. 89), in welchen sie stattfinden, also

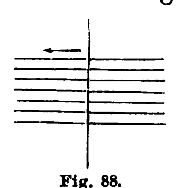


Fig. 88.

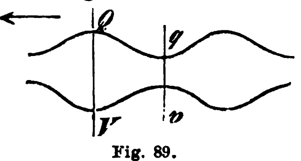


Fig. 89.

$$QV = qv \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

Das letztere Princip kommt z. B. sofort in Anwendung, wenn wir die Ausflussgeschwindigkeit v einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit V vergleichen, mit welcher die Oberfläche AB dieser Flüssigkeit in einem beliebigen Gefässe (Fig. 90) sinkt, aus dessen Boden bei CD Flüssigkeit ausströmt. Sind nämlich F und f beziehungsweise die Querschnitte AB und CD,

so erhalten wir nach Formel 102 $V = \frac{f}{F} \cdot v$. Um v zu berechnen, was wir uns zunächst zur Aufgabe stellen wollen, ziehen wir den Satz von der lebendigen Kraft zu Rathe, dessen mathematischen Ausdruck wir in Formel 49 gegeben haben. Dabei wollen wir uns zuvörderst vorstellen, dass das Niveau AB durch entsprechenden Zufluss immer constant erhalten werde und sonach eine stationäre Strömung der Flüssigkeit stattfinde. Dabei verfolgen wir ein Flüssigkeitsmolecül von der Masse m, von welchem wir annehmen, dass es von der Oberfläche AB auf einem beliebigen Wege in die Ausflussöffnung gelangt sei und sonach die Geschwindigkeitsänderung V in v erfahren habe. Derselben entspricht ein Zuwachs an lebendiger Kraft im Betrage von $\frac{mv^2}{2} - \frac{mV^2}{2}$, der vermöge Formel 49 der Arbeit der auf das Flüssigkeitstheilchen wirkenden Schwerkraft mg entspricht. Diese Arbeit, der Werth des in Formel 49 vorgestellten Integrals, ist im gegenwärtigen Falle offenbar mgh, wobei h die Druckhöhe bedeutet, somit $\frac{mv^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = mgh$, woraus durch Abkürzung und Einsetzen des Werthes $V = \frac{f}{F} \cdot v$ hervorgeht

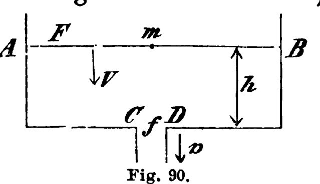


Fig. 90.

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{f}{F}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

eine Formel, welche, wenn f sehr klein im Vergleiche mit F angenommen wird, in die gewöhnliche sogenannte Torricellische Formel

$$v = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

übergeht, die man auch in der Form ausdrücken kann, dass die Ausflussgeschwindigkeit gleichkommt der Endgeschwindigkeit beim freien Falle durch die Druckhöhe.

Für dieses Ergebniss ist es nicht nur ganz gleichgiltig, auf welchem Wege das Flüssigkeitstheilchen m von der Oberfläche bis zur Mündung herabgelangt ist, da im Sinne der Formel 49 im vorliegenden Falle (in dem wir es mit der ver-

ticalen Schwerkraft zu thun haben) eben nur die Projectionen jenes Weges auf die verticale Z-Axe in Betracht kommen, sondern es kommt auch nicht einmal darauf an, dass das nämliche Flüssigkeitstheilchen m, welches wir uns mit der Geschwindigkeit v austretend dachten, überhaupt jemals an der Oberfläche gewesen sei und den ganzen vorhin besagten Weg thatsächlich zurückgelegt habe. Der Vorgang kann vielmehr auch in der Art gedacht werden und wirklich stattfinden, dass das Wassermolecül m aus einer tiefer liegenden Schichte in die Ausflussmündung gelangt, dafür aber ein gleiches Molecül m aus einer höheren Schichte in jene tiefere vorgerückt ist, an dessen Stelle dann wieder ein anderes u. s. w.; kurz, es kommt nur darauf an, dass alle Theile der Druckhöhe von gleichen Wassermolecülen, nicht aber, dass die ganze Druckhöhe von demselben Wassermolecül zurückgelegt worden sei.*)

Mit der dieser berechneten Ausflussgeschwindigkeit entsprechenden Ausflussmenge $M = f \cdot v \cdot t$ während der Zeit t stimmt diejenige, welche man in Wirklichkeit zu beobachten pflegt, nicht genau überein und zwar wegen Geschwindigkeitsverminderung durch Reibung und wegen der an der Ausflussstelle eintretenden sogenannten Contraction des Flüssigkeitsstrahles, was eine geringere Ausflussmenge (z. B. nur 60% von der berechneten) mit sich bringt. Ist

$$M = \varrho f v t = \varrho f t \sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 105)$$

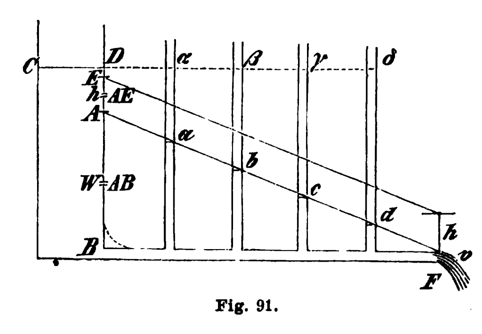


Fig. 91.

die wirklich beobachtete Ausflussmenge während der Zeit t, so ist ϱ der sogenannte **Ausflusscoëfficient**.

Bei der Bewegung einer Flüssigkeit durch eine längere Röhrenleitung kommen auch noch die Widerstände an der Röhrenwand in Betracht, deren Abhängigkeit von der Geschwindigkeit von Volkmann gründlich untersucht worden

---

*) Es machen sich hier ähnliche Erwägungen geltend wie bei einem stationären elektrischen Strome; siehe Clausius: Abhandlungen, II. Band.

ist,*) worauf wir hier nicht weiter eingehen wollen. Wir begnügen uns damit, an einem Beispiele darauf hinzuweisen, wie sich die Wirkung dieser Widerstände durch Druckmesser nachweisen lässt, die wir längs einer Röhrenleitung BF (Fig. 91) stellenweise anbringen. So lange die Mündung F geschlossen ist, steht die Flüssigkeit in den Druckmessern bei α, β, γ, δ in gleicher Höhe mit dem Niveau CD im Reservoir. Strömt die

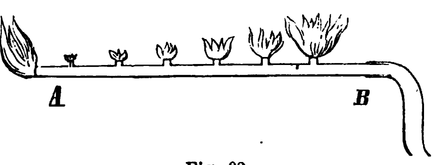


Fig. 92.

Flüssigkeit bei F aus und erhalten wir die Strömung stationär durch entsprechenden Zufluss, so dass das Niveau CD constant bleibt, so beobachten wir andere Niveaustände a, b, c, d in den Druckmessern, welche gegen die Mündung hin abnehmen, in dem Masse, als eben der Widerstand abnimmt, welchen die Flüssigkeit von der betrachteten Stelle aus bis zur Mündung noch zu überwinden hat. Man hat daher diese Druckhöhen auch Widerstandshöhen genannt, und es stellt AB in unserer Zeichnung die Widerstandshöhe W für die ganze Röhrenleitung vor. Dagegen entspricht der Ausflussgeschwindigkeit v eine gewisse Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{v^2}{2g}$, in der Zeichnung durch $AE = h$ vorgestellt. Der Rest ED der gesammten Druckhöhe BD kommt auf Rechnung des Ueberganges der Flüssigkeit aus dem Reservoir in das Ausflussrohr und wird als Höhe des Uebergangswiderstandes bezeichnet, welcher Uebergangswiderstand durch eine trichterförmige Gestaltung (in der Figur punktirt angedeutet) an der Uebergangsstelle vermindert werden kann. Auf die Erscheinungen, welche sich bei zusammengesetzten Röhrenleitungen, die verschiedene Querschnitte, Verzweigungen, mehr oder weniger scharfe Biegungen, darbieten, kann hier nicht eingegangen werden. Wir erwähnen nur noch einer analogen Erscheinung beim Ausströmen von Gasen, welche sich durch den in Figur 92 angedeuteten Versuch veranschaulichen lässt. Lassen wir Leuchtgas durch ein Rohr AB bei voller Mündung ausströmen, welches Rohr mit seitlichen gleich weiten feinen Bohrungen versehen ist, bei

---

*) Siehe dessen Hämodynamik.

welchen Gas ausströmen kann, und entzünden wir allenthalben das ausströmende Gas, so beobachten wir an den seitlichen Flämmchen eine gegen die Mündung hin abnehmende Höhe, von einer entsprechenden Abnahme des Seitendruckes (Widerstandshöhe) herrührend.

Der Druck einer strömenden Flüssigkeit gegen die Gefässwand heisst der hydrodynamische Druck im Gegensatze zum hydrostatischen Drucke der ruhenden Flüssigkeit. Die Beziehungen zwischen beiden Druckkräften werden aus folgender Darstellung ersichtlich sein. Wir setzen eine in der wiederholt angedeuteten Weise unterhaltene stationäre Strömung, z. B. von Wasser, in einem Gefässe (Fig. 93) von veränderlichem Querschnitte voraus, dessen Mündung bei AB unter Wasser tauchen mag, während das Niveau EG in constanter Höhe über dem unteren Wasserspiegel bleibt. Es ist uns unbenommen, uns auf jedem dieser beiden Niveaux einen gewissen äusseren Druck wirksam zu denken, z. B. p auf dem unteren, P auf dem oberen Wasserspiegel, die genannten Grössen auf die Flächeneinheit bezogen, so dass, wenn s im Allgemeinen das specifische Gewicht der Flüssigkeit vorstellt, $\frac{p}{s}$ und $\frac{P}{s}$ beziehungsweise die Höhen der Flüssigkeitssäulen sind, durch die wir uns jene äusseren Druckkräfte ersetzt denken können, in welchem Falle dann h als Niveauabstand erscheinen wird. Mit Beibehaltung der bei Ableitung der Formel 103 gewählten Bezeichnungen ergibt sich dann sofort $\frac{mv^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = mgh$.

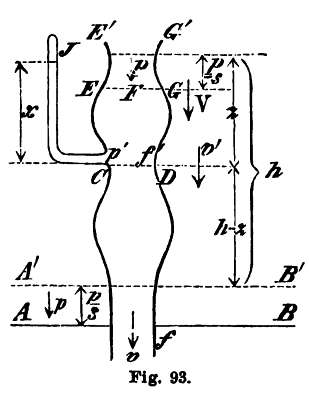


Fig. 93.

Denken wir uns nun an der Stelle des Querschnittes CD, der die Geschwindigkeit v' haben mag, einen oben bei J geschlossenen luftleeren Druckmesser angebracht, der im angenommenen Falle die Druckhöhe x aufweist, während z die Tiefe des betrachteten Querschnittes unter dem mit Rücksicht auf den äusseren Druck reducirten Niveau $E'G'$ bedeutet, so erhalten wir bezüglich v' die analoge Gleichung $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2}$

$= mg(x + h - z)$, wobei x die dem hydrodynamischen Drucke p' am Orte des Druckmessers entsprechende Druckhöhe ist; (weil offenbar $x + h - z$ als Gesammtdruckdifferenz erscheint, wenn wir jetzt CD statt EG als Oberfläche betrachten). Die Verbindung beider Gleichungen gibt

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = mg[h - (x + h - z)] = mg(z - x) \text{ woraus}$$

$$x = z - \left[\frac{v'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 106)$$

hervorgeht.

Diese Gleichung lehrt, dass die hydrodynamische Druckhöhe an einer bestimmten Stelle gleich ist der hydrostatischen Druckhöhe daselbst, weniger dem Ueberschusse der Geschwindigkeitshöhe an der betrachteten Stelle über jene an der freien Oberfläche. Führt man mit Rücksicht auf Formel 102 den Werth $V = \frac{f'}{F} \cdot v'$ ein, so wird

$$x = z - \frac{v'^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{f'}{F}\right)^2\right]$$

woraus die Relation

$$x \gtrless z \text{ für } f' \gtrless F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 107)$$

sich ergibt.

Ist das Gefäss von Luft umgeben und fällt x kleiner aus als die atmosphärische Wasserdruckhöhe ($10{,}336^m$), so wird Luft einströmen oder, wenn ein an der betreffenden Stelle der Gefässwand eingesetztes Rohr in eine Sperrflüssigkeit taucht, ein Saugen eintreten, eine Erscheinung, welche man das hydrodynamische Paradoxon genannt hat. Dabei ist übrigens wohl zu beachten, dass die vorstehenden Formeln nur solange Geltung haben, als $x \geqq 0$, weil x in Wirklichkeit nie negativ und v' nie grösser werden kann als beim Ausströmen in den leeren Raum *).

*) Vergl. Ritter, techn. Mechanik.

Drittes Hauptstück.

Mechanik der Gase.

Die neueren Ansichten über das Wesen der Wärme stehen im Zusammenhange mit anderen als den bisher geläufigen Vorstellungen über die Natur der Gase.

Die Molecularbewegungen, welche wir Wärme nennen, d. h. auf welche wir die sogenannte Temperatur eines Körpers zurückführen, müssen wir uns natürlich bei Körpern von verschiedenen Aggregationszuständen in anderen Formen denken, welche vornehmlich durch den Grad des Zusammenhanges zwischen den Körpertheilchen bedingt sind, insofern überhaupt von einem solchen Zusammenhange in jedem einzelnen Falle noch die Rede sein kann, was später näher erläutert werden soll. Im festen Körper schwingen die Molecüle um bestimmte Gleichgewichtslagen, im flüssigen hingegen wird der bereits in hohem Grade gelockerte Zusammenhang der Theilchen sehr häufig ein Losreissen derselben von einander gestatten, so dass ein Flüssigkeitstheilchen zu anderen und wieder anderen Nachbartheilchen gelangt, in deren Nähe es eine Zeit lang oscillatorische Bewegungen ausführt, bis in Folge derselben unter begünstigenden Umständen (d. i. unter Mitwirkung von Kräften, die es von anderen Molecülen erfährt) gelegentlich wieder eine Trennung desselben und ein Uebergang zu anderen Nachbarmolekülen eintritt, wodurch die Bewegung der Molecüle bald als eine schwingende, bald als eine fortschreitende sich gestaltet, mit welchen wechselnden Bewegungsformen sich wohl auch eine wälzende (rollende) verbinden wird. Bei den Gasen endlich müssen wir, um Theorie und Erfahrung in Einklang zu bringen, annehmen, dass keine Wechselwirkung unter den Molecülen mehr stattfindet als während des Stosses bei den sogleich näher zu besprechenden Bewegungen. Sind die Molecularbewegungen im festen Körper (von Drehungen abgesehen) ausschliesslich

als schwingende, im flüssigen als theils schwingende, theils fortschreitende zu betrachten, so haben wir sie im gasförmigen geradezu nur als fortschreitende uns zu denken, welche in der Art stattfinden, dass jedes Molecül so lange in gerader Richtung und zwar, wie wir bald sehen werden, mit sehr grosser Geschwindigkeit sich bewegt, bis ein Stoss an die Gefässwand oder gegen ein anderes Molecül eintritt und in Folge dessen das Theilchen wieder nach einer anderen Richtung seine geradlinige Bewegung fortsetzt u. s. w. Von rotirenden Bewegungen der Molecüle, welche dabei ohne Zweifel auch mit vorkommen, sowie von den schwingenden Bewegungen der die einzelnen Molecüle constituirenden Atome, wollen wir vor der Hand absehen, jedoch schon jetzt bemerken, dass die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung allein zu gering ist, um die ganze in einem Körper vorhandene Wärme darzustellen, wie dies wenigstens bezüglich der Gase von Clausius nachgewiesen worden ist, worauf wir später zurückkommen werden.

(Druck und Temperatur im Sinne der dynamischen Gastheorie.) Die vorgetragene Anschauung von der Natur des Gaszustandes muss, soll sie eine wissenschaftliche Berechtigung haben, vor allem den Gesetzen Genüge leisten, welche die Erfahrung über das Verhalten der Gase gelehrt hat. Es soll unsere nächste Aufgabe sein, uns davon zu überzeugen, indem wir bei unseren Betrachtungen dem von Krönig eingeschlagenen Wege folgen, die durch das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz ausgedrückten Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur der Gase aus den vorhin beschriebenen Molecularbewegungen abzuleiten. Wir wählen die Beweisführung Krönigs als die einfachste, ohne die Vorzüge von anderen allgemeineren mathematischen Entwickelungen (z. B. von Clausius) zu verkennen.*)

Um den Gang der Rechnung zu vereinfachen, wollen wir gewisse Voraussetzungen machen, welche die Entwickelungen wesentlich kürzen, ohne einer Ausdehnung der Resultate, zu welchen wir dabei kommen, auf die in der Wirklichkeit vorkommenden weniger einfachen Verhältnisse im Wege zu stehen.

Eine solche Voraussetzung soll zuvörderst die sein, dass

*) Eine elementare Darstellung des Gegenstandes (aber allgemeiner als die Krönig'sche) hat Pfaundler (Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1871) gegeben.

alle Theilchen des betrachteten Gases, welches wir uns in einem würfelförmigen Gefässe von der Seitenlänge a eingeschlossen denken wollen, dieselbe Geschwindigkeit c besitzen. So verschieden nämlich auch in Wirklichkeit die Geschwindigkeiten der einzelnen Gasmolecüle bei der gegebenen Temperatur sein mögen, so können wir uns doch immerhin eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit c so gewählt denken, dass sie dieselbe Summe der lebendigen Kräfte der Molecüle bedingt. So verschieden ferner die Bewegungsrichtungen der einzelnen Molecüle thatsächlich sind, so können wir uns dieselben immerhin in drei rechtwinkelige Componenten zerlegt denken, auf welchen Umstand wir die Zulässigkeit einer zweiten Voraussetzung gründen, welche darin bestehen soll, dass wir uns ein Drittel $\left(\frac{n}{3}\right)$ der vorhandenen Molecüle ausschliesslich parallel der x-Axe, ein zweites Drittel parallel der y-Axe und abermals ein Drittel parallel der z-Axe in Bewegung denken, wobei wohl kaum ausdrücklich beizufügen ist, dass wir uns die Massen m der einzelnen Molecüle eines und desselben Gases als gleich zu denken haben, wodurch jedem derselben eine Bewegungsgrösse mc erwächst. Drittens wollen wir unsere Betrachtung durch die Erwägung vereinfachen, dass die Gesammtzahl der Stösse gegen eine Wand nicht geändert wird, wenn man annimmt, dass die Molecüle, ohne aneinander zu stossen, also in unserem Falle je $\frac{n}{3}$ zwischen je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen, ihre Bewegungen ausführen. Beim senkrechten Stosse gegen eine Wand des Würfels (die obere oder untere z. B., wenn wir zunächst die der z-Axe parallelen Bewegungen betrachten), welcher Stoss, wie eine einfache Erwägung lehrt, offenbar $\frac{c}{2a}$ mal in einer Secunde erfolgen muss, findet eine Umkehrung der Bewegungsrichtung, folglich auch eine Umsetzung der besagten Bewegungsgrösse aus $+mc$ in $-mc$ statt, wenn wir uns den Stoss als einen vollkommen elastischen denken, was wir künftighin ein für alle mal festhalten wollen. Da hierbei das Molecül m die Geschwindigkeit c nicht nur in seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung verliert, sondern zugleich in der entgegengesetzten wieder erhält, so erfährt es bei dem betrachteten Vorgange eine Einwirkung von Seiten der Gefässwand, welche der Ertheilung einer Geschwindigkeit vom Be-

trage $2c$ an eine Masse $= m$ gleichkommt. Da nun dies in einer Secunde $\frac{c}{2a}$ mal geschieht, so wird der Masse m in der Secunde die Geschwindigkeit $2c$ eben $\frac{c}{2a}$ mal ertheilt $\left(=\frac{c^2}{a}\right)$. Wir fassen daher mit Recht $\frac{mc^2}{a}$ als die Kraft auf, mit welcher die Gefässwand auf das stossende Molecül reagirt, somit auch als die Kraft des Stossdruckes selbst.*) Diese wird auf die betrachtete Würfelfläche mit Rücksicht auf die Zahl der Molecüle in $\frac{n}{3}$-fachem Masse übertragen, welchen Betrag $\frac{n}{3} \cdot \frac{mc^2}{a}$ wir offenbar durch a^2 zu dividiren haben, um den Gasdruck p auf die Flächeneinheit zu bekommen. Derselbe ist also

$$p = \frac{n}{3} \cdot \frac{mc^2}{a} \cdot \frac{1}{a^2} \quad \text{. . . . .} \quad 108)$$

wofür wir, $a^3 = v$ setzend und in Zähler und Nenner mit 2 multiplicirend auch schreiben können

*) Diese Schlussfolgerung beruht auf derselben Grundansicht, nach welcher man eine constante Kraft, die man sich ja auch stossweise wirkend denken kann, durch mg vorstellt, wenn sie der Masse m in der Zeiteinheit eine Summe von Geschwindigkeiten $= g$ ertheilt. Dass die im vorliegenden Falle nach jedem $\frac{2a}{c}$-ten Theil einer Secunde ertheilten Geschwindigkeitsbeträge keine Beschleunigung per Secunde ergeben, hat seinen Grund in dem Umstande, dass diese Geschwindigkeiten beim Stosse an die gegenüderliegende Wand immer wieder umgekehrt werden, wodurch eben das Theilchen in gleichförmiger Bewegung erhalten wird. Man kann die Sache auch so auffassen. Es sei f der innerhalb der Dauer des Stosses veränderliche Reactionsdruck der Wand, der in einem Zeitdifferential dt eine Aenderung dc der Molecülgeschwindigkeit bedingt, also $f = m\frac{dc}{dt}$ oder $fdt = mdc$, so gibt die Integration innerhalb der Dauer ϑ des Stosses $\int_0^\vartheta fdt = 2mc$, da ja $+c$ und $-c$ die Grenzwerthe der Geschwindigkeit am Ende und bei Beginn des Stosses sind. Der Druck f variirt während des Stosses zwischen Null und einem gewissen Maximalwerthe; man kann sich aber immerhin einen Mittelwerth F denken, welcher der Gleichung genügt $F\vartheta = \int_0^\vartheta fdt$ also $F\vartheta = 2mc$. Die Stossdauer ϑ ist aber $= \frac{2a}{c}$, folglich $F = \frac{mc^2}{a}$ und der Druck p von $\frac{n}{3}$ Molecülen auf die Flächeneinheit $p = \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{mc^2}{a}$ wie oben, u. s. w.

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{1}{v} \quad \ldots \ldots \quad 109)$$

Schreiben wir diese Gleichung in der Gestalt

$$\frac{3}{2} pv = n \cdot \frac{mc^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad 110)$$

oder

$$\frac{3}{2} pv = n \cdot \frac{mc^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad 111)$$

wenn p in Gewichtseinheiten gemessen werden soll, so stellt uns die Grösse rechts vom Gleichheitszeichen die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung aller Gasmolecüle dar. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes

$$pv = RT \quad \ldots \ldots \quad 112)$$

wobei T die absolute Temperatur und R eine Constante ist, auf welche wir später zurückkommen werden, so folgt weiter

$$n \cdot \frac{mc^2}{2g} = T \cdot \text{Const.} \quad \ldots \ldots \quad 113)$$

d. h. es erscheint die absolute Temperatur proportional der Summe der lebendigen Kräfte der Gasmolecüle, ein Ergebniss, welches sich bei näherer Erwägung als ein sehr wahrscheinliches darstellt und die Hypothese, die nach dem Vorgange J. R. Mayer's (Heilbronn) die Wärme als Bewegung*) auffasst, wesentlich stützt.

Durch weiter eingehende Betrachtungen hat übrigens Clausius gezeigt, dass die lebendige Kraft K der fortschreitenden Bewegung der Gasmolecüle, welche wir bisher allein betrachtet haben, zur gesammten lebendigen Kraft H aller vorhandenen Molecularbewegungen (mit Einschluss nämlich der rotirenden Bewegungen der Molecüle und der schwingenden Bewegung der sie constituirenden Atome) bei einem bestimmten Gase immer in einem constanten Verhältnisse steht und zwar

$$\frac{K}{H} = \frac{3}{2}\left[\frac{c_p}{c_v} - 1\right] \quad \ldots \ldots \quad 114)$$

wobei c_p und c_v die Wärmecapacitäten für constanten Druck und constantes Volumen bedeuten; oder

*) Siehe Clausius: Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen (Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie. II. Bd.).

$$\frac{K}{H} = \frac{3}{2}\left[\frac{\gamma' - \gamma}{\gamma}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 115)$$

wenn γ' und γ dieselben, jedoch auf die Volumseinheit bezogenen Wärmecapacitäten vorstellen.

Da nun $\gamma' - \gamma$ für alle vollkommenen Gase gleich ist, so erscheint $\frac{K}{H}$ mit γ verkehrt proportional. Für zusammengesetzte Gase, bei deren Vereinigung keine Volumsverminderung stattfindet, ist γ gleich; für solche dagegen, bei deren Verbindung Volumsverminderung eintritt, ist γ grösser, also $\frac{K}{H}$ kleiner und somit die von uns nicht näher in Betracht gezogenen Molecularbewegungen, namentlich die schwingende Bewegung der die einzelnen Molecüle constituirenden Atome, welche man auch Bewegungen der Bestandtheile der Molecüle genannt hat, von grösserem Belang. Die lebendige Kraft der Bewegungen der Bestandtheile muss vornehmlich bedeutend sein bei Gasen von complicirter chemischer Zusammensetzung, bei welchen viele Atome zu einem Molecüle gehören.

Diese Bewegungen der Bestandtheile der Gasmolecüle werden streng genommen in jedem einzelnen Falle auch auf das Ergebniss des Stosses der Gasmolecüle von Einfluss sein. Sobald sich aber ein constantes Verhältniss zwischen der fortschreitenden Bewegung der Gasmolecüle und der schwingenden der Bestandtheile eingestellt hat, wird man bei der Untersuchung der Gesammtwirkung einer grossen Zahl von Molecülen, von den bei den einzelnen Stössen vorkommenden Unregelmässigkeiten absehend, die Stösse als nach den gewöhnlichen Elasticitätsgesetzen vor sich gehend betrachten können. Auch die Molecularkräfte werden beim Vorgange des Stosses ins Spiel kommen; doch sind die Theile des von einem Molecül zurückgelegten Weges, auf welchem Molecularkräfte zur Geltung kommen können, bei vollkommenen Gasen verschwindend klein, wesshalb wir davon absehen können. Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass die absolute Temperatur, welche, wie wir gesehen haben, der lebendigen Kraft K der fortschreitenden Bewegung der Molecüle proportional gesetzt werden muss, wenn das M.-G. Gesetz*) aus unserer Hypothese über die Natur der

*) Mit dieser Abkürzung bezeichnen wir das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz.

Gase hervorgehen soll, — auch der gesammten lebendigen Kraft H proportional ist, da beide lebendigen Kräfte nach Formel 114 in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.

Bilden wir uns nun eine Vorstellung über den Gang der Rechnungen, durch welche man zu bestimmten Werthen für die Geschwindigkeit der Gasmolecüle hingeführt worden ist.

Lassen wir p (im Sinne der Formel 111) Gewichtseinheiten bedeuten und n die Zahl der Molecüle in der Gewichtseinheit des betrachteten Gases vorstellen, so dass wir $nm = 1$ setzen können, so erhalten wir, die Formeln 111 und 112 zusammenfassend: $pv = \frac{2}{3} n \frac{mc^2}{2g} = RT$; also $\frac{c^2}{3g} = RT$, folglich

$$c = \sqrt{3gRT} \quad \ldots \ldots \quad 116)$$

oder, insofern R eine der Dichte δ des Gases (siehe Formel 125) verkehrt proportionale Grösse ist und für atmosphärische Luft den Werth 29,27 hat, mit Rücksicht auf den gleichfalls bekannten Werth der Acceleration der Schwere

$$c = 29{,}35 \sqrt{\frac{T}{\delta}} \quad \ldots \ldots \quad 117)$$

Auf diesem Wege fand Clausius z. B. für Sauerstoff $c = 461^m$, für Stickstoff $c = 492^m$, für Wasserstoff $c = 1844^m$.

(**Mariotte-Gay-Lussac'sches Gesetz.**) Der Ausdruck des Mariotte'schen (1679) oder, wie die englischen Physiker es nennen, des Boyle'schen (1662) Gesetzes ist bekanntlich

$$pv = \text{Const.} \quad \ldots \ldots \quad 118)$$

Spätere Versuche anderer Physiker (Muschenbrök u. s. w.) haben zu widersprechenden Resultaten über die Abweichungen, welche sich bei wiederholter Prüfung jenes Gesetzes herausgestellt hatten, geführt, wesshalb diese Frage der Gegenstand eingehender Untersuchungen geworden ist, von welchen wir zunächst jene von Oersted und Schwendsen erwähnen wollen. Dieselben sind, theils nach der Mariotte'schen Methode, die wir als bekannt voraussetzen, bis zu einem Drucke von 8 Atmosphären, theils durch Abwägen einer Windbüchsenflasche und Messung des Druckes der darin comprimirten Luft mittelst Sicherheitsventil (Hebelbelastung) bis 68 Atmosphären ausgeführt worden. Das Gesetz bestätigte sich für atmosphä-

rische Luft, nicht aber für andere, namentlich coërcible Gase, z. B. schweflige Säure.

Damit stimmten die Ergebnisse der Versuche von Despretz mit dem Oersted'schen Compressionsapparate überein, in welchem mittelst Quecksilber als Sperrflüssigkeit gleiche Volumina Luft, Ammoniak (NH_3), Schwefelwasserstoff (SH_2) und Cyan (CN) bei gleichem Niveaustande eingeschlossen waren. Schon bei einem Drucke über 2 Atmosphären zeigte sich bei den coërciblen Gasen eine raschere Volumsabnahme; für atmosphärische Luft behauptete Despretz die Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes bis 15 Atmosphären, ebenso für Wasserstoff); über 20 Atmosphären erscheint aber nach ihm die atmosphärische Luft stärker verdichtet, als dem Mariotte'schen Gesetze entspricht.

Hieran reihen sich die berühmten Versuche, welche Arago und Dulong, von der Académie beauftragt, in einem eigens zu diesem Zwecke eingerichteten Gebäude im Wesentlichen nach der Mariotte'schen Methode bis 27 Atmosphären Druck ausgeführt haben. Von vornherein ein einfaches Gesetz für den Zusammenhang zwischen Druck und Volumen anzunehmen geneigt, übersahen sie den Umstand, dass die beobachteten Volumina durchwegs kleiner als die berechneten waren und schlossen eben aus der Kleinheit der Differenzen auf die Richtigkeit des Gesetzes von Mariotte.

Pouillet ergänzte die Arbeit von Arago und Dulong durch Ausdehnung derselben auf andere Gase und fand, dass Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd (NO) und Kohlenoxyd (CO) bis 100 Atmosphären dem Mariotte'schen Gesetze folgen, dagegen schweflige Säure (SO_2), Ammoniak (NH_3), Kohlensäure (CO_2), Stickoxydul (N_2O) über eine drei bis vierfache Compression hinaus eine stärkere Zusammendrückbarkeit zeigen. Dasselbe fand er auch für Leuchtgas und Grubengas, obgleich diese bei 100 Atmosphären noch nicht flüssig werden.

Man hielt nun für Luft, Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff das Mariotte'sche Gesetz für giltig, bis Regnault (1845) die Frage wieder aufnahm. Seine Methode war, sowie bei Arago und Dulong, im Wesentlichen ebenfalls die Mariotte'sche, doch mit der Modification, dass nicht succesive auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ .... Volumen comprimirt, sondern eine Röhre nach einander mit Luft von verschiedener Pressung gefüllt und diese dann jedesmal

auf die Hälfte des Volumens zusammengedrückt wurde, durch eine Quecksilbersäule, deren Höhe eben den Druck angab. Dabei zeigte sich, wenn der Stellenzeiger 1 auf das ursprüngliche, der Stellenzeiger 2 auf das halbe Volumen sich beziehen, $\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} > 1$, folglich $\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \mu > 0$, während nach dem Mariotte'schen Gesetze $\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = 1$ sein sollte. Diese Abweichung beginnt schon bei zwei Atmosphären. Dasselbe zeigte sich bei Stickstoff und Kohlensäure. Die μ sind klein und wachsen mit zunehmender Pressung. Das $+\mu$ entspricht der auch durch die Versuche von Arago und Dulong constatirten grösseren Zusammendrückbarkeit im Vergleiche mit dem Mariotte'schen Gesetze. Die Abweichung in diesem Sinne ist nach Despretz und Pouillet sehr auffallend bei den coërciblen Gasen. Mit diesen werden also, wenn auch dem Grade nach sehr verschieden, Stickstoff, Kohlensäure und Luft durch Regnault's Versuche in eine Linie gestellt. Bei Wasserstoff dagegen zeigte sich μ negativ und ebenfalls wachsend. Wasserstoff zeigt also in steigendem Masse eine geringere Zusammendrückbarkeit als nach dem Mariotte'schen Gesetze. Sehr wichtig ist die Beobachtung Regnault's, dass μ für Kohlensäure, deren Dichte er bei 100° und 1, beziehungsweise ½ Atmosphären Druck bestimmte, bei dieser höheren Temperatur viel kleiner ausfiel. μ scheint daher eine Function der Temperatur zu sein und es ist wahrscheinlich, dass es für jedes Gas eine bestimmte Temperatur gibt, bei welcher es den Grenzzustand $\mu = 0$ besitzt, dies- und jenseits von welchem jedoch dasselbe Gas, beziehungsweise ein positives oder negatives μ annimmt.

Nicht aufgeklärt ist das Verhältniss dieser Ergebnisse zu jenen der Natterer'schen Versuche (der neueren nämlich, vom Jahre 1854). Nach diesen entsprechen einem Drucke von 2790 Atmosphären von Wasserstoff 1008, von Luft 726, von Stickstoff 705 Volumina u. s. w. Die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze begannen für Wasserstoff bei 89, für Sauerstoff bei 188, für Stickstoff bei 96, für Luft bei 107, für Kohlenoxyd bei 138 Atmosphären.

Der Ausdruck des Gesetzes von Gay-Lussac ist

$$v_t = v_o(1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots \quad 119)$$

oder

$$p_t = p_o(1 + \alpha t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 120)$$

wenn v_t, p_t und v_o, p_o beziehungsweise Volumen und Druck bei den Temperaturen $t^0 C$ und $0^0 C$ bedeuten, während α der Ausdehnungscoëfficient des betrachteten Gases ist, eine Grösse, welche bekanntlich für die permanenten Gase nahezu ganz gleich gefunden worden ist (für coërcible z. B. Kohlensäure, entschieden grösser).

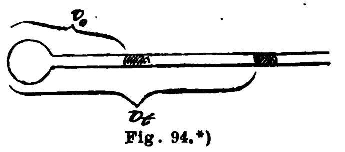


Fig. 94.*)

Wir wollen bei diesem Anlasse in Kürze an die in den Anfangsgründen der Physik ausführlicher zur Sprache kommenden Methoden erinnern, welche zur Kenntniss der Grösse α geführt haben. Viele Bemühungen in dieser Richtung sind aus dem Grunde vergeblich gewesen, weil man die untersuchte Luft in nicht hinreichend getrocknetem Zustande angewendet hat. Erst Gay-Lussac ist es gelungen, übereinstimmende Resultate zu finden, nach welchen die Ausdehnung der Luft bei einer Erwärmung von 0^0 bis 100^0 etwa $\frac{3}{8}$ des ursprünglichen Volumens beträgt. Dabei wurde die Luft, die wir uns in einem thermometerähnlichen Gefässe (Fig. 94) mittelst eines Queksilbertröpfchens abgesperrt denken wollen, unter constantem Drucke (dem gleichzeitigon Barometerstande entsprechend) beobachtet. Findet dagegen die Erwärmung der Luft von 0^0 auf 100^0 unter solchen Umständen statt, dass das Luftvolumen constant erhalten wird, so tritt eine Erhöhung der Expansivkraft ein, welche der Gleichung 120 entspricht, während die durch den vorhin beschriebenen Versuch ermittelte Volumsänderung durch Gleichung 119 dargestellt wird. Das letztere Verfahren hat z. B. Rudberg

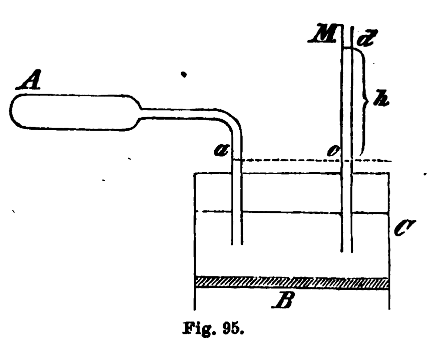


Fig. 95.

*) Die Figur zeigt die Ausdehnung eines durch einen Quecksilbertropfen abgesperrten Luftvolumens von v_o bis v_t entsprechend der Formel 119.

angewendet, dessen Apparat (Fig. 95) schematisch angedeutet ist. Derselbe besteht bekanntlich aus einem Quecksilberbehälter C mit beweglichem Boden B, ähnlich dem bei einem Fortin'schen Gefässbarometer, durch dessen Deckel ein offenes Manometerrohr M eingesetzt ist und andererseits das zum Luftreservoir A führende Rohr, in welchem wir uns das Luftvolumen Aa mittelst Quecksilber abgesperrt denken. Mittelst des beweglichen Bodens (der bekanntlich durch einen ledernen Sack hergestellt ist, der mittelst einer Schraube gehoben und gesenkt werden kann) lässt sich das besagte Volumen, welches sich bei steigender Temperatur auszudehnen sucht, constant erhalten, während dagegen im Manometer das Quecksilber sich erhebt. Denken wir uns a und c in gleichem Niveau und bezeichnen wir den bei Anwendung eines offenen Manometers in Betracht kommenden Barometerstand mit b, so ist offenbar $h + b$ die dem Gasdrucke entsprechende Quecksilbersäule, durch deren Beobachtung der Druck p für jede Temperatur ermittelt werden kann.

Nach beiderlei Methoden haben sich nahezu übereinstimmende Werthe für α, den sogenannten Ausdehnungscoëfficienten, ergeben, mit dessen Ermittelung sich auch noch Magnus und Regnault in sehr sorgfältigen Untersuchungen beschäftigt haben. Wir können mit grosser Annäherung α durch $\frac{11}{3000}$ oder durch 0,003666 oder endlich — und diese Zahl wollen wir gewöhnlich anwenden — durch $\frac{1}{273}$ darstellen.

Suchen wir nun nach Formel 120 die Temperatur x, für welche unter Voraussetzung einer unbeschränkten Giltigkeit des Gay-Lussac'schen Gesetzes der Druck $p_x = 0$ werden müsste, so ergäbe sich $p_x = p_0(1 + \alpha x) = 0$; folglich $x = \frac{-1}{\alpha} = -273$. Wir werden auf diese Art zu einer Temperatur von $-273^0 C$ hingeführt, welche mit Rücksicht auf ihre soeben erwähnte physikalische Bedeutung als Temperatur des absoluten Nullpunktes bezeichnet wird. Die von diesem Nullpunkte aus gezählten Temperaturen $T = 273 + t$ pflegt man eben die absoluten Temperaturen zu nennen, die wir später in unsere Rechnungen vorzugsweise einführen werden.

Zuvörderst wollen wir die Beziehungen des Mariotte'schen und des Gay-Lussac'schen Gesetzes in eine einzige Gleichung zusammenfassen, welche ebensowohl deshalb von Wichtig-

keit ist, weil sie uns gestattet, sowohl das bei einem gewissen Drucke und einer gewissen Temperatur gemessene Volumen eines Gases auf einen anderen Druck und eine andere Temperatur zu reduciren, als auch, weil sich daraus der gewöhnliche Ausdruck des vereinigten Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes (Formel 112) leicht ableiten lässt. Es bedeute nunmehr $v_{p,t}$ das beim Drucke p und der Temperatur t gemessene Volumen eines Gasquantums und $v_{p',t'}$ das Volumen desselben Gasquantums, gemessen beim Drucke p' und der Temperatur t', so stehen diese beiden Grössen vermöge des Mariotte'schen Gesetzes in dem Verhältnisse $p' : p$ und vermöge des Gay-Lussac'schen Gesetzes in dem Verhältnisse $1 + \alpha t : 1 + \alpha t'$. Es ist demnach

$$v_{p,t} = v_{p',t'} \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} \quad \ldots\ldots \quad 121)$$

Diese, oder vielmehr die daraus abgeleitete $v_{p',t'} = v_{p,t} \frac{p}{p'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}$ ist die erwähnte Reductionsformel für Gasvolumina, deren Anwendung durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden soll.*)

Um aus dieser Formel (121) zum gewöhnlichen Ausdrucke des M.-G. Gesetzes zu kommen, nehmen wir zunächst an, das betrachtete Gasquantum sei die Gewichtseinheit, ferner $t' = 0^0 C$, $p' = p_0 = 10334$, nämlich gleich dem Drucke in Kilo pro Quadratmeter, wenn der Gasdruck einer Quecksilbersäule vom Betrage des normalen Barometerstandes 760^{mm} das Gleichgewicht hält, und endlich $v_{p',t'} = v_0$ das diesen Normalzuständen ($0^0 C$ und 760^{mm}) entsprechende Volumen der Gewichtseinheit, specifisches Volumen genannt. Wir erhalten dann $v_{p,t} = \frac{p_0 v_0 (1+\alpha t)}{p}$ und wenn wir die nunmehr selbstverständlichen Indices p und t weglassen und mit p multipliciren

---

*) Ein bei 25^0 C und 715^{mm} Druck gemessenes Gasvolumen betrug 135^{cc}; wie viel beträgt das auf die Normaltemperatur ($0^0 C$) und den Normaldruck (760^{mm}) reducirte Volumen x? — Man findet

$$x = 135 \cdot \frac{715}{760} \cdot \frac{1+\alpha . 0}{1+\alpha . 25} = 135 \cdot \frac{715}{760} \cdot \frac{273}{273+25}$$

wenn man nämlich im Zähler und Nenner durch α dividirt und für $\frac{1}{\alpha}$ den Werth 273 setzt. Die Ausführung der Rechnung gibt mit Weglassung der Decimalen $x = 116^{cc}$.

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) \quad \ldots \ldots \quad 122)$$

wofür wir auch schreiben können $\alpha p_0 v_0 \left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = \frac{p_0 v_0}{273} T$ $= \frac{p_0 v_0}{T_0} T$, wenn wir $273 + 0 = T_0$ setzen.

Schreiben wir endlich noch

$$\frac{p_0 v_0}{T_0} = R \quad \ldots \ldots \quad 123)$$

so erhalten wir

$$pv = \frac{p_0 v_0}{T_0} T = RT \quad \ldots \ldots \quad 124)$$

wie bereits unter 112 angeführt wurde. Für atmosphärische Luft ist wegen $v_0 = 0{,}7734$ der Werth von $R = 29{,}27$, somit für ein δ mal dichteres Gas, bei welchem v_0 in demselben Verhältnisse kleiner ausfällt

$$pv = \frac{29{,}27}{\delta} T \quad \ldots \ldots \quad 125)$$

(**Gesetz von Poisson.**) Betrachten wir in der Gleichung $pv = RT$ die Temperatur als constant, so kommen wir auf $pv =$ Const., den Ausdruck des Mariotte'schen Gesetzes zurück. Die in diesem Gesetze ausgeprägte Beziehung zwischen Druck und Volumen ist demnach an die Bedingung geknüpft, dass bei den Aenderungen des Druckes oder Volumens, welche in Betracht gezogen werden sollen, eine Aenderung der Temperatur nicht stattfinde. Wir müssen demnach, um dem Mariotte'schen Gesetze seine Geltung zu wahren, bei der Ausdehnung eines Gases für eine entsprechende Wärmezuleitung, bei der Zusammendrückung eines Gases für eine entsprechende Wärmeableitung Sorge tragen, da sonst aus später näher zu erläuternden Gründen im ersten Falle eine Temperaturerniedrigung, im letzteren eine Temperaturerhöhung eintreten würde. Diese Betrachtung legt uns die Frage nahe, welche Beziehungen zwischen Druck und Volumen etwa wohl zutreffen, wenn entweder eine Compression ohne Wärmeableitung (z. B. in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle) oder eine Expansion ohne Wärmezuleitung vollzogen würde. Den ersten Fall sehen wir beispielsweise mit einiger Annäherung realisirt beim pneumatischen Feuerzeuge, in welchem wir durch eine rasche Compression der Luft eine bis zum Entzünden von Zündschwamm,

Schwefelkohlenstoff u. dgl. gesteigerte Temperatur hervorbringen.

Um die fraglichen Beziehungen zu erforschen, denken wir uns an der Gewichtseinheit eines Gases vom Drucke p und vom Volumen v bei der Temperatur T einen Vorgang eingeleitet, bei welchem durch eine Temperaturerhöhung $d_v T$ unter constantem Druck eine Ausdehnung um den Betrag dv stattfinde und dann wieder einen Vorgang, bei welchem durch eine Temperaturerhöhung $d_p T$ unter constantem Volumen eine Druckvermehrung dp eintritt. Die zu ersterem Vorgange erforderliche Wärmemenge soll $d_v Q$, die im zweiten Falle nöthige $d_p Q$ heissen, während wir für die Wärmecapacitäten bei constantem Druck und bei constantem Volumen beziehungsweise die Bezeichnung c_p und c_v beibehalten. Da wir es mit der Gewichtseinheit eines Gases zu thun haben, so wird offenbar $d_v Q = c_p \cdot d_v T$ und $d_p Q = c_v \cdot d_p T$ sein müssen, wesshalb es sich zunächst um die hier in Rechnung stehenden partiellen Temperatursdifferentialien handelt.

Zu deren Ermittelung liefert uns die partielle Differentiation der M.-G. Formel 124

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}\\ \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 126)$$

somit ist $d_v T = \frac{p}{R} \cdot dv$ und $d_p T = \frac{v}{R} \cdot dp$, also $d_v Q = c_p \frac{p}{R}\, dv$ und $d_p Q = c_v \cdot \frac{v}{R} \cdot dp$. Befindet sich nun aber das Gas unter solchen Verhältnissen, dass Druck nnd Volumen sich gleichzeitig ändern können, so wird die den zusammengehörigen Aenderungen dp und dv entsprechende Wärmezunahme $dQ = d_v Q + d_p Q$, somit

$$dQ = \frac{1}{R}(c_p p\, dv + c_v v\, dp) \quad \ldots \ldots \quad 127)$$

Trifft nun der vorhin erwähnte Fall zu, dass eine Wärmezuleitung (oder -Ableitung) nicht stattfinden kann, so tragen wir dieser Bedingung Rechnung, indem wir $dQ = 0$ setzen, in welchem Falle dann auch $c_p p\, dv + c_v v\, dp = 0$ sein muss. Wir finden hieraus

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_p}{c_v}\cdot\frac{dv}{v} = -k\frac{dv}{v}\text{*)} \quad \ldots\ldots \quad 128)$$

Die Integration zwischen zwei durch die Indices 1 und 2 angedeuteten Grenzen liefert in bekannter Weise

$$l\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -k\,l\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = l\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-k} = l\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k \quad \ldots \quad 129)$$

somit ergibt sich zwischen p und v die Beziehung

$$p_2 v_2^k = p_1 v_1^k \quad \ldots\ldots \quad 130)$$

oder allgemein

$$p v^k = \text{Const.} \quad \ldots\ldots \quad 131)$$

$$\left(k = 1{,}4; \quad \frac{1}{k} = 0{,}71\right)$$

Diese Formel ist das Gesetz von Poisson. Dasselbe wird im Vergleiche mit Formel 108 bisweilen auch das potenzirte Mariotte'sche Gesetz genannt.

Setzt man in der Gleichung 130 für $p_2 v_2$ den Werth RT_2 und für $p_1 v_1$ den Werth RT_1, so findet man weiter

$$\left.\begin{aligned} T_2 v_2^{k-1} &= T_1 v_1^{k-1} \\ \text{oder} \quad & \\ T v^{k-1} &= \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 132)$$

$$(k - 1 = 0{,}4)$$

Schreibt man die letzte Gleichung in der Form $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1}$, und entnimmt $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}$ aus 130, so ergibt sich ferner

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \text{ oder}$$

$$T_1 p_1^{-\frac{k-1}{k}} = T_2 \cdot p_2^{-\frac{k-1}{k}} \quad \ldots\ldots \quad 133)$$

das ist:

$$T \cdot p^{-\frac{k-1}{k}} = \text{Const.**)} \quad \ldots\ldots \quad 134)$$

$$\left(\frac{k-1}{k} = 0{,}29\right)$$

*) Das Minuszeichen deutet die Zusammengehörigkeit einer Druckzunahme mit einer Volumsabnahme und umgekehrt an.

**) Wir geben zur Erläuterung des Gebrauches dieser Formeln, die

(Compressionsarbeit und Expansionsarbeit.) Wir unterscheiden bei der Compression oder Expansion eines Gases eine isothermische, welche bei constanter Temperatur stattfindet, entsprechend der Bedingung der Giltigkeit des Mariotte'schen Gesetzes und eine adiabatische, als welche wir eine solche bezeichnen, bei welcher eine Wärmeab- oder Zuleitung nicht stattfindet und in Folge dessen die aus den Formeln 132 und 133 des Poisson'schen Gesetzes zu berechnenden Temperaturänderungen eintreten. Die beim Comprimiren eines Gases verrichtete Arbeit ist, wie leicht einzusehen, in beiden Fällen sehr verschieden, was durch eine kurze Andeutung der bezüglichen Rechnungen noch erläutert werden soll.

1) Isothermische Compression. Die dabei verrichtete Arbeit A_1 wird offenbar dargestellt durch das Integral $-\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$, wobei in Anbetracht der bei der Compression eintretenden Volumsverkleinerung das Minuszeichen steht. Vermöge der in diesem Falle zutreffenden Giltigkeit des Mariotte'schen Gesetzes, können wir p, welches behufs der Integration als $f(v)$ eingeführt werden muss, ausdrücken durch $\frac{p_1 v_1}{v}$ (da eben $p v = p_1 v_1$), wobei die Stellenzeiger 1 auf den Anfangszustand sich beziehen mögen. Wir erhalten dann

$$-\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1 v_1 \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \,\mathrm{l}\left(\frac{v_1}{v_2}\right), \text{ somit}$$

$$A_1 = R\,T\,\mathrm{l}\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135)$$

wobei durch Weglassung des Stellenzeigers von T der Beständigkeit der Temperatur während des Vorganges Rechnung

---

eben nichts Anderes als verschiedene Ausdrücke des Poisson'schen Gesetzes sind, ein Zahlenbeispiel. Ein Luftvolumen von 15^{cc} werde ohne Wärmeableitung auf $1cc$ comprimirt. Die Anfangstemperatur sei $20^0\,C$, es soll die Endtemperatur und der resultirende Druck berechnet werden, wenn der ursprüngliche Gasdruck 1 Atmosphäre war. — Hier ist (nach Formel 132) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{0,4} = \frac{273+20}{273+x} = \left(\frac{1}{15}\right)^{0,4}$. Hieraus $273 + x = 293.15^{0,4} = 889$; somit $x = 616^0 C$ Endtemperatur. Für den Druck findet man nach Formel 131: $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1,4} = \frac{1}{p_2} = \left(\frac{1}{15}\right)^{1,4}$; somit $p_2 = 45$ Atmosphären.

getragen ist. Lässt man das Gas wieder sich ausdehnen, so wird dabei eine Expansionsarbeit im entgegengesetzten Sinne von gleichem Betrage verrichtet werden.

2) Adiabatische Compression. Findet keine Wärmeableitung bei der Zusammendrückung statt, so ist bei der Darstellung des p als $f(v)$ nicht mehr das Mariotte'sche, sondern das Poisson'sche Gesetz (Formel 131) zu berücksichtigen, so dass wir erhalten:

$$A_1 = -\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1 v_1^k \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v^k} = \frac{p_1 v_1^k}{k-1}\left(\frac{1}{v_2^{k-1}} - \frac{1}{v_1^{k-1}}\right)$$

$$= \frac{R T_1 v_1^{k-1}}{k-1}\left(\frac{1}{v_2^{k-1}} - \frac{1}{v_1^{k-1}}\right) = \frac{R T_2 v_2^{k-1}}{k-1}\left(\frac{1}{v_2^{k-1}} - \frac{1}{v_1^{k-1}}\right)$$

(letztere Gleichungen nämlich mit Rücksicht auf Formel 132 und deren bereits erläuterte Ableitung aus 131). Mit Rücksicht auf $T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1} =$ Const. (Formel 132) findet man weiter, im Zähler und Nenner innerhalb der Klammer beziehungsweise mit T_2 und T_1 multiplicirend,

$$A_1 = \frac{R}{k-1}(T_2 - T_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 136)$$

Lässt man das comprimirte Gas auf die Anfangstemperatur T_1 zurückkommen, und dann adiabatisch von v_2 auf v_1 wieder sich ausdehnen, so findet dabei eine Expansionsarbeit A_2 statt, für welche man findet $\frac{A_1}{A_2} = -\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}$; die zum Comprimiren verwendete Arbeit wird also unter diesen Bedingungen bei der Ausdehnung des Gases nur theilweise wieder gewonnen.

(**Verhältniss der Wärmecapacitäten.**) Von den Wärmecapacitäten c_p und c_v ist bisher nur die erstere (bei gleichem Drucke) genauen directen Bestimmungen (Delaroche und Bérard; Regnault u. A.) zugänglich gewesen, die letztere (bei constantem Volumen) fand man indirect aus Versuchen, welche einen Schluss auf das Verhältniss der beiden Wärmekapacitäten zuliessen. Wir wollen in dieser Richtung nur der diesbezüglichen Bestimmung von Laplace erwähnen, der das Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten aus der Schallgeschwindigkeit erschloss.

Will man die Formel 44 für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem elastischen Körper $c = \sqrt{\frac{gE}{s}}$

speciell auf atmosphärische Luft anwenden, so kommt es vor Allem darauf an, den entsprechenden Werth für E einzuführen.

Könnte man annehmen, dass die bei der Fortpflanzung einer Schallwelle stattfindenden Compressionen und Expansionen der Luft isothermische seien, so wäre, wie Newton gezeigt hat,

$$c = \sqrt{\frac{gp}{s}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 137)$$

zu setzen, wobei p den Luftdruck auf die Flächeneinheit bedeutet, und man mit Rücksicht auf Formel 124 v statt $\frac{1}{s}$ setzend und für pv den Werth RT einführend, auch schreiben kann

$$c = \sqrt{gRT} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 138)$$

Den Umstand, dass die nach dieser Newton'schen Formel berechnete Schallgeschwindigkeit sich ungefähr um $\frac{1}{6}$ zu klein herausstellte, hat Laplace mit der scharfsinnigen Bemerkung aufgeklärt, dass man anstatt p vielmehr kp in die Rechnung einzuführen habe, indem die Dichtigkeitsänderungen, welche bei der Fortpflanzung einer Schallwelle stattfinden, als adiabatische zu betrachten sind, wesshalb in dem verdichteten Theile der Schallwelle eine raschere Zunahme und im verdünnten Theile eine in gleichem Masse raschere Abnahme der Expansivkraft, als dem Mariotte'schen Gesetze entsprechen würde, eintrete, welche beiden Vorgänge zur Vergrösserung der Schallgeschwindigkeit zusammenwirken.*) Mit Berücksichtigung dieses Umstandes erhalten wir dann

---

*) Hinsichtlich der Beziehungen zwischen den Grössen E, p und kp bemerke man Folgendes. Wenn $\varDelta_1 l$ die durch die Belastung 1 bewirkte Verkürzung eines prismatischen Körpers von der Länge l bedeutet, so ist nach Formel 40: $E = \frac{l}{\varDelta_1 l}$, wenn ferner $\varDelta_1 v$ die Volumsverkleinerung eines in einem prismatischen Gefässe eingeschlossenen Gasvolumens v bei der Zunahme des Druckes p um den Betrag 1 vorstellt, so ist im Falle einer isothermischen Verdichtung (nach dem Mariotte'schen Gesetze) sehr nahe $p : 1 = v : \varDelta_1 v$, also $p = \frac{v}{\varDelta_1 v}$ und im Falle einer adiabatischen Verdichtung (nach dem Poisson'schen Gesetze) sehr nahe $kp = \frac{v}{\varDelta_1 v}$.

$$\left.\begin{array}{l} c = \sqrt{g\frac{kp}{s}} \\ \text{oder} \\ c = \sqrt{kgRT} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 139)$$

Da nun die Schallgeschwindigkeit erfahrungsmässig mit ziemlicher Genauigkeit bekannt ist (für eine Temperatur von $t^0 C.$ sehr nahe $333\sqrt{1+\alpha t}$ Meter) und andererseits $T = 273 + t$, ferner R und g auch als gegeben erscheinen, so liess sich k aus diesen Daten berechnen und ergab sich sehr nahe = 1,41, somit die nicht direct gemessene Wärmecapacität bei constantem Volumen

$$c_v = \frac{c_p}{1{,}41}\text{*)} \quad \ldots \ldots \quad 140)$$

(**Mechanisches Aequivalent der Wärme; Bedeutung der Constanten *R* des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes.**) Wir denken uns in einem prismatischen Gefässe (Fig. 96) von $1^{\square m}$ Querschnitt das Volumen $v = \frac{1}{s}$ der Gewichtseinheit atmosphärischer Luft beim Drucke p von der Temperatur T auf die Temperatur $2T$ erwärmt. Dabei wird nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze das Volum v in $2v$ übergehen, während das Gas die Wärme $c_p T$ in sich aufnimmt. Verhindern wir in einem anderen Falle die Ausdehnung des Gases bei der Erwärmung um den gleichen Betrag, in welchem Falle wir schliesslich dem doppelten Drucke das Gleichgewicht halten müssen, so ist die Wärmeaufnahme $c_v T$. — Der Unterschied der beiden Wärmemengen $(c_p - c_v) T$ entspricht der im ersten Falle vom ausgedehnten Gase verrichteten Arbeit pv. Nennen wir E die Zahl, mit welcher wir eine Wärmemenge multipliciren müssen, um den äquivalenten Arbeitswerth zu erhalten, so kommen wir demnach auf die Gleichung $E(c_p - c_v) T = pv$ und folgern hieraus mit Rücksicht auf $pv = RT$, dass

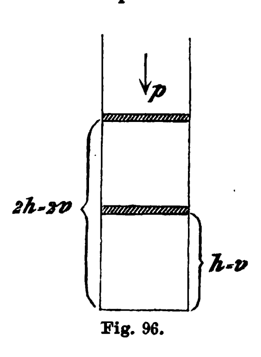


Fig. 96.

*) Häufig nimmt man $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}40$ als Mittelwerth der bisherigen Bestimmungen.

$$R = E(c_p - c_v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 141)$$

Die Grösse E, das mechanische Aequivalent der Wärme genannt (schon von J. R. Mayer annähernd ermittelt; später vornehmlich von Joule genauer bestimmt) finden wir hieraus

$$E = \frac{R}{c_p - c_v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 142)$$

oder

$$E = 423{,}55^{*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 143)$$

mit Rücksicht auf die bekannten Werthe von R (nahe $= 29{,}27$) c_p (nahe $= 0{,}237$) und c_v (nahe $= 0{,}168$).

Schreiben wir, wie es üblich ist, $\frac{1}{E} = A$, so erhalten wir

$$c_p - c_v = AR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

Es ist also die Differenz der beiden Wärmecapacitäten für jedes Gas eine constante Zahl (für Luft $= 0{,}0688$, für Wasserstoff $0{,}994$ u. s. w.), wobei die Werthe von c_p und c_v selbst, für verschiedene Gase bekanntlich ungleich sind (für Luft, wie bereits angegeben; für Wasserstoff $c_p = 3{,}409$, $c_v = 2{,}415$), und noch bemerkenswerth ist, dass der auf die Volumseinheit eines Gases bezogene Werth jeder der beiden Capacitäten für alle Gase constant ist (z. B. $\frac{c_p}{v_0}$ für alle Gase sehr nahe $= 0{,}31$; $\frac{c_v}{v_0}$ für alle Gase nahe $= 0{,}22$).

Mit Benutzung der Formel 142, welche auch in der Gestalt $R = Ec_v(k - 1)$ geschrieben werden kann, geht Formel 136 über in $A_1 = Ec_v(T_2 - T_1)$, sowie die äquivalente Wärmemenge

$$AA_1 = \frac{A_1}{E} = Q_1 = c_v(T_2 - T_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145)$$

Zur Erläuterung der Constanten R sei noch folgendes bemerkt. Erwärmt man die Gewichtseinheit eines Gases von der Temperatur T um $1^0 C$ unter constantem Drucke p, so geht das Volumen v über in $v + \alpha v$ und man hat nach 124 $p(v + \alpha v) = R(T + 1)$. Offenbar stellt

*) Dieser Werth ist eigentlich derjenige, den man nach Joule als den wahrscheinlichsten Mittelwerth aus den bisherigen Untersuchungen über das mechanische Aequivalent der Wärme betrachtet, während man aus den angeführten annähernden Werthen für R, c_p und c_v die Zahl 424,2 erhalten würde.

$$p \cdot \alpha v = R \quad \ldots \ldots \ldots \quad 146)$$

die hierbei verrichtete Expansionsarbeit vor, wesshalb man die Grösse R auch definiren kann als den Werth der Arbeit, welche die Gewichtseinheit eines Gases bei der Erwärmung um $1^0 C$ unter constantem Drucke verrichtet.

Eine sehr bequeme Berechnung des Werthes R für verschiedene Gase gestattet die von G. Schmidt entdeckte Relation:

$$R = \frac{2E}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 147)$$

wobei m das sogenannte Molecülgewicht des betreffenden Gases ist (also z. B. bei Sauerstoff = 32, bei Wasserstoff = 2, bei Ammoniak = 17 u. s. w.).

(**Specifische Expansivkraft.**) Betrachtet man die Gewichtseinheit eines Gases bei verschiedenen Werthen für Druck, Volumen und Temperatur, so ergibt sich, mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen, aus dem M.-G. Gesetze unmittelbar die Beziehung $p : p' = \frac{T}{v} : \frac{T'}{v'}$ oder wenn wir die den Rauminhalten verkehrt proportionalen Dichten einführen, $p : p' = d \cdot T : d' \cdot T'$. Anders verhält sich die Sache, wenn wir zwei verschiedene Gase untersuchen. In diesem Falle kömmt dann noch ein Factor in Betracht, wie sich aus der einfachen Erwägung ergibt, dass zwei verschiedene Gase (z. B. Wasserstoff und atmosphärische Luft) bei gleicher Dichte und gleicher Temperatur keineswegs gleiche Spannungen besitzen. (Würde man z. B. Wasserstoff bei gleicher Temperatur auf die gleiche Dichte bringen mit atmosphärischer Luft, so würde dieses Gas nahezu die 14fache Expansivkraft äussern.) Dies führt uns zu dem Begriffe der sogenannten specifischen Expansivkraft, welche man einem Gase in desto grösserem Masse zuschreibt, je grösser dessen Spannung bei gleicher Dichte und Temperatur im Vergleiche mit einem anderen Gase z. B. atmosphärischer Luft ist. (In unserem Falle würden also die specifischen Expansivkräfte von Wasserstoff und atmosphärischer Luft sich ungefähr wie 14 : 1 verhalten.) Bezeichnet man die specifischen Expansivkräfte zweier Gase, die wir vergleichen wollen, mit η und η', während p, d, T und p', d', T' beziehungsweise Druck, Dichte und absolute Temperatur für beide Gase bedeuten, so erhalten wir demnach

$$p : p' = d \cdot T \cdot \eta : d' \cdot T' \cdot \eta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 148)$$

Aus dieser Formel folgt, wenn wir $p = p'$ und $T = T'$ voraussetzen, in welchem speciellen Falle wir die Dichte d mit δ, die Dichte d' mit δ' bezeichnen wollen, die Beziehung

$$\eta : \eta' = \frac{1}{\delta} : \frac{1}{\delta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 149)$$

d. h. die specifischen Expansivkräfte zweier Gase verhalten sich verkehrt wie ihre bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur gemessenen Dichten.

Um nun die specifischen Expansivkräfte verschiedener Gase experimentell zu vergleichen, erwäge man zunächst, dass nach dem soeben Gesagten $\delta : \delta' = \frac{d \cdot T}{p} : \frac{d' \cdot T'}{p'}$ und dass ferner, wenn q und q' die Gewichte gleicher Volumina beider Gase bedeuten, wie wir sie z. B. erhalten, wenn wir einen Glasballon erst mit dem einen und dann mit dem andern Gase füllen und die Gewichte der Gase in bekannter Weise durch Wägung ermitteln, wegen $q : q' = d : d'$ auch $\delta : \delta' = \frac{q\,T}{p} : \frac{q'T'}{p'}$.

Es erhellet sofort, dass wir durch die soeben angedeuteten Wägungen ohne Weiteres zur Kenntniss der specifischen Expansivkräfte beider Gase oder vielmehr ihres Verhältnisses $\eta : \eta' = \frac{1}{\delta} : \frac{1}{\delta'}$ gelangen, wenn wir auch Temperatur und Druck bei der Füllung des Ballons in beiden Fällen beobachten.

Es bedarf wohl kaum der ausdrücklichen Bemerkung, dass wir statt 148 auch

$$\frac{1}{\delta} : \frac{1}{\delta'} = \eta : \eta' = \frac{p}{d \cdot T} : \frac{p'}{d' \cdot T'} = \frac{p}{q\,T} : \frac{p'}{q'\,T'} \quad . \quad . \quad 150)$$

hätten schreiben und daran die soeben vorgetragenen Erörterungen knüpfen können.

Bezieht man η' und δ' in Formel 149 auf atmosphärische Luft, nimmt man ferner deren specifische Expansivkraft zur Einheit der specifischen Expansivkräfte und versteht man endlich unter δ' die gleichfalls (bei Gasmessungen) = 1 angenommene Dichte der atmosphärischen Luft bei $0^0\,C$ und 760^{mm} Druck, so ergibt sich:

$$\eta = \frac{1}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 151)$$

d. h. die specifische Expansivkraft eines Gases ist gleich dem reciproken Werthe seiner bei $0^0 C$ und 760 ^{mm} Druck gemessenen Dichte. (Dem Wasserstoffe entspricht also nahezu die specifische Expansivkraft 14 oder genauer $\frac{1}{0,069}$; dem Sauerstoffe $\frac{1}{1,106}$; dem Stickstoffe $\frac{1}{0,971}$; der Kohlensäure $\frac{1}{1,529}$; dem Wasserdampfe $\frac{1}{0,623}$ u. s. w., wobei die Nenner die betreffenden δ bedeuten.)

(**Zusammengesetzte Gase; Dalton'sches Gesetz.**) Wenn die Volumina v_1 und v_2 zweier Gase, welche die specifischen Gewichte s_1 und s_2 haben mögen, in einem Volumen V vereinigt sind, wobei eine im Falle einer chemischen Verbindung etwa eintretende Volumsverminderung nicht ausgeschlossen ist, so wird das specifische Gewicht S des Gemenges, beziehungsweise der Verbindung, der Gleichung genügen müssen:

$$VS = v_1 s_1 + v_2 s_2 \quad \ldots \ldots \quad 152)$$

Die Anwendung dieser Formel, welche nach Umständen auch umgekehrt zur Berechnung der Dichte eines Bestandtheiles dienen kann, mag durch ein und das andere Beispiel erläutert werden: Wenn man annimmt, dass zwei Volumina Kohlenoxydgas aus 1 Vol. Sauerstoff und 1 Vol. hypothetischen Kohlengases bestehen, findet man aus der Dichte des Kohlenoxydgases 0,9678 mit Berücksichtigung der Dichte des Sauerstoffes 1,1056 die Dichte x des hypothetischen Kohlengases (nach obiger Formel) in folgender Weise: $2 . 0,9678 = 1 . x + 1 . 1,1056$, somit $x = 0,83$.

Da ferner 1 Volumen Sauerstoff und 2 Volumina Wasserstoff 2 Volumina Wassergas bilden, so findet man die Dichte x des Wasserdampfes wie folgt: $2x = 1 . 1,1056 + 2 . 0,0693$; $x = 0,622$.

Sind in einem Raume V gleichzeitig mehrere Gase in solcher Menge vorhanden, dass sie einzeln genommen im Raume V die Spannungen $p_1, p_2, p_3 \cdots$ äussern würden, so ist die Spannung des Gemenges

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = \Sigma p \quad \ldots \quad 153)$$

Der Ausdruck dieser Thatsache heisst das Dalton'sche Gesetz. Es ergibt sich als eine nothwendige Folgerung der (Seite 161 bis 166) entwickelten mechanischen Theorie des Gaszustandes, wenn man die dort durchgeführten Schlussfolgerungen

sich auf jedes einzelne Gas des in Betracht kommenden Gemenges angewendet denkt; daher entfällt auch die Nothwendigkeit einer anderen theoretischen Begründung des Dalton'schen Gesetzes, wie sie wohl auch unabhängig von einer speciellen Vorstellung von der Natur der Gase auf Grundlage des Mariotte'schen Gesetzes geliefert werden könnte. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Bestandtheile des Gemenges nicht chemisch aufeinander einwirken.

(**Absorption.**) Ist ein fester oder flüssiger Körper von einem Gase umgeben, so nimmt er ein bestimmtes Quantum von demselben in sich auf. Man nennt diesen Vorgang Absorption und bezeichnet nach Bunsen das auf 0^0 C und 760^{mm} Druck reducirte Gasvolumen, welches von der Volumseinheit eines Körpers bei eben diesem Drucke absorbirt wird, als den sogenannten Absorptionscoëfficienten des Gases für den Körper. Er beträgt unter Voraussetzung einer Temperatur von 15^0 C beispielsweise für Wasser: bei Stickstoff 0,015, bei Wasserstoff 0,019, bei Sauerstoff 0,030, bei Kohlensäure 1,002, bei atmosphärischer Luft 0,018 u. s. w. Der Absorptionscoëfficient ist vom Drucke unabhängig (d. h. das Wasser würde z. B. auch von beliebig verdichteter atmosphärischer Luft 0,018 seines Volumens absorbiren); die absorbirte Gasmenge (Gewicht) ist also diesem Drucke proportional (Henry'sches Gesetz). Dagegen hängt der Absorptionscoëfficient von der Temperatur ab. Bunsen hat ihn desshalb in der Form

$$\alpha = a + bt + ct^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

dargestellt und durch Versuche bei verschiedenen Temperaturen t die Constanten: a, b, c für viele Flüssigkeiten und Gase ermittelt. Ein allgemeines Gesetz hat sich noch nicht finden lassen; übrigens kann man sagen: Der Absorptionscoëfficient nimmt bei steigender Temperatur ab.

Bei der Absorption von Gasgemischen kommt hinsichtlich der absorbirten Mengen für jedes einzelne Gas die Expansivkraft in Betracht, mit welcher es nach dem Dalton'schen Gesetze (siehe am Schlusse des vorhergehenden §.) an der gesammten Expansivkraft des Gasgemisches participirt. Es werden z. B. bei atmosphärischer Luft (0,79 Volumina Stickstoff und 0,21 Volumina Sauerstoff), wenn P^{mm} deren Druck, also 0,79 P den Druck des Stickstoffes und 0,21 P den des

Sauerstoffes bedeuten, vom Wasservolumen V beziehungsweise folgende auf 760^{mm} Druck reducirte Volumina absorbirt werden: $0{,}015 \,.\, 0{,}79 \cdot \frac{P}{760} \cdot V$ Stickstoff, und $0{,}030 \,.\, 0{,}21 \cdot \frac{P}{760} \cdot V$ Sauerstoff,*) wobei die oben angeführten Werthe der Absorptionscoëfficienten in Rechnung gebracht sind.

(**Diffusion.**) Wenn zwei Gase unmittelbar oder, durch eine poröse Scheidewand getrennt, mit einander in mechanische Wechselwirkung treten (wir setzen nämlich ausdrücklich voraus, dass eine chemische Einwirkung der Gase auf einander nicht stattfinde), so vollzieht sich zwischen den beiden Gasen ein Austausch, dessen Endresultat die Herstellung eines gleichförmigen Gemenges auf beiden Seiten ist. Man nennt diesen Vorgang Diffusion und kann ihn beispielsweise an einem Versuche, wie der nachstehend beschriebene, beobachten.

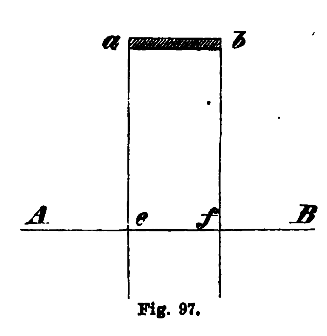


Fig. 97.

Ein mit einem Gypspfropf *ab* (Figur 97) oben verschlossener Glascylinder, mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt, taucht in Quecksilber in der Art, dass das Niveau *ef* im Cylinder mit dem äusseren *AB* stets übereinstimmend und daher das eingeschlossene Gas immer unter dem Drucke einer Atmosphäre erhalten werde. Wird der Cylinder z. B. mit Wasserstoff gefüllt, so zeigt der Versuch, dass für jedes ausgetretene Volumen des genannten Gases ein kleineres Volumen atmosphärischer Luft eintritt (weshalb eben der Cylinder entsprechend gesenkt werden muss, um den constanten Druck zu erhalten) und man findet schliesslich, nachdem innerhalb und ausserhalb des Cylinders Luft von gleicher Beschaffenheit hergestellt und Gleichgewicht eingetreten ist, dass das ausgetretene Wasserstoffvolumen 3,1 mal grösser ist, als das dafür eingetretene Volumen atmosphärischer Luft, ein Verhältniss, welches nicht viel vom verkehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln der Dichten beider Gase ($\sqrt{14{,}43} : \sqrt{1} = 3{,}8 : 1$) abweicht. In der That lautet

*) Die Summe gibt für $P = 760$ und $V = 1$ natürlich wieder den Absorptionscoëfficienten 0,018 der atmosphärischen Luft bei 15° C.

das von Graham beobachtete Gesetz der Diffusion (immer gleichen Druck auf beiden Seiten vorausgesetzt) dahin, dass die Diffusionsvolumina v und v' zweier Gase von den Dichten δ und δ' der Relation entsprechen

$$v : v' = \sqrt{\delta'} : \sqrt{\delta} \quad \ldots \ldots \quad 155)$$

Die Analogie dieses Resultates im Vergleiche mit einem später zur Sprache kommenden Gesetze (Formel 158) für das Ausströmen der Gase, nach welchem die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch eine enge Oeffnung in dünner Wand sich eben auch verkehrt wie die Quadratwurzeln aus den reducirten Gasdichten δ verhalten,*) hat Graham veranlasst, die beschriebenen Diffusionserscheinungen eben als Strömungserscheinungen aufzufassen, für welche annähernd dieselben Gesetze Geltung haben sollen. Untersuchungen von Bunsen haben jedoch ausser Zweifel gestellt, dass die Strömung von Gasen durch poröse Wände, wie sie bei den betrachteten Diffusionserscheinungen in Anwendung kommen (Gypspfropf), so beträchtlich von den soeben erwähnten Strömungsgesetzen und somit auch von dem Graham'schen Diffusionsgesetze abweichen, dass zwischen beiden nicht der unmittelbare Zusammenhang, wie ihn Graham annahm, obwalten kann. Indessen sind die bis jetzt vorliegenden Versuche Bunsen's noch nicht ausreichend gewesen, diese Frage durch Aufstellung einer sicheren Theorie der Diffusionserscheinungen zu erledigen, weshalb wir eben nicht weiter auf den Gegenstand eingehen und auch den durch neuere Versuche constatirten Einfluss des Materiales der porösen Wand nur im Vorübergehen erwähnen wollen.

Eine Diffusionserscheinung im grossartigsten Massstabe bietet uns die atmosphärische Luft dar, in welcher Stickstoff und Sauerstoff ungeachtet ihres ungleichen specifischen Gewichtes allenthalben gleichförmig gemengt erscheinen.

In auffallender Weise lässt sich die Erscheinung der Diffusion mittelst des, Fig. 98 angedeuteten Apparates zur Anschauung bringen. Eine Thonzelle A, wie man sie zu galvanischen Batterien zu verwenden pflegt, wird mit einem durchbohrten Kautschukpfropf B luftdicht verschlossen (um dabei

*) Man beachte, dass unter den Dichten δ, von welchen hier durchwegs die Rede ist, die mittelst Formel 150 definirten Dichten zu verstehen sind.

ein Zersprengen der Thonzelle zu vermeiden, wird man dieselbe zweckmässig mit einer metallenen Hülse *rr* als Fassung versehen) und in den Pfropf ein heberförmig gebogenes Rohr *BCD* luftdicht eingeschoben. Ist dieses mit einer Sperrflüssigkeit (z. B. gefärbtem Wasser) gefüllt, und lässt man allenfalls aus einer Gasleitung Leuchtgas gegen die Thonzelle hin strömen, so wird von demselben mehr in die Zelle ein- als Luft dafür austreten und in Folge dessen die Sperrflüssigkeit gegen *D* sich erheben.

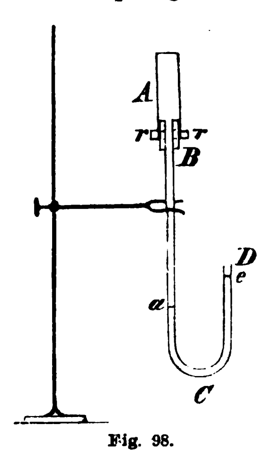


Fig. 98.

Von praktisch wichtigen Anwendungen der Diffusionsgesetze wollen wir hier noch den A n s e l l'schen G r u b e n g a s - i n d i c a t o r anführen, welcher den Zweck hat, die Anwesenheit einer derartigen nachtheiligen Beimischung der atmosphärischen Luft durch ein elektrisches Signal anzuzeigen. Je nachdem es sich um die Nachweisung eines leichteren (Grubengas) oder schwereren (Kohlensäure) Gases als die atmosphärische Luft ist, handelt, besitzt der Apparat eine entsprechend verschiedene Einrichtung. Der Indicator für leichtere Gase, in Fig. 99 angedeutet, hat folgende Einrichtung. Am eisernen Postamente *AB*, welches den mit Quecksilber gefüllten Canal *CD* enthält, ist an der Mündung *C* des Canals ein birnförmiges gläsernes Gefäss *E* angebracht, welches oben mit einer Drahtklemme *F* versehen ist, von welcher ein Platindraht mit seiner Spitze *f* bis nahe an das Quecksilberniveau *e* herabreicht. An der anderen Mündung *D* des besagten Canals befindet sich ein trichterförmiger eiserner Aufsatz, oben mit einem Gypspfropfe *ab* geschlossen, während das Quecksilberniveau bei *cd* sich befindet. Endlich ist am Postamente,

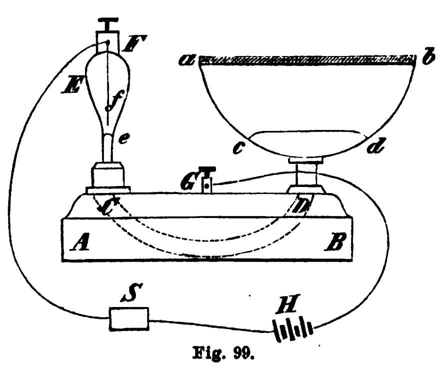


Fig. 99.

folglich mit dem Quecksilber in leitender Verbindung, noch die Drahtklemme *G* angebracht. Denkt man sich auf die in der Zeichnung angedeutete Art den beschriebenen Apparat nebst einem hier nicht weiter zu besprechenden elektromagnetischen Signalapparate *S* in den Schliessungskreis einer Batterie *H* eingeschaltet und der Einwirkung von Grubengas ausgesetzt, so wird dasselbe, indem es stärker durch den Pfropf *ab* diffundirt, als die atmosphärische Luft aus dem Apparate, eine Druckdifferenz bewirken, welche eine Erhebung des Quecksilberniveaus *e* und endlich eine Berührung desselben mit der Drahtspitze *f* zur Folge hat, wodurch Stromschluss und Signal veranlasst werden. Der ganz ähnlich construirte Indicator für schwerere Gase (Fig. 100)*), bei welchem man sich den umgekehrten Process in der Art vorzustellen hat, dass z. B. weniger Kohlensäure durch *ab* nach einwärts als atmosphärische Luft nach auswärts diffundirt, bedarf wohl kaum einer weitläufigeren Erklärung.

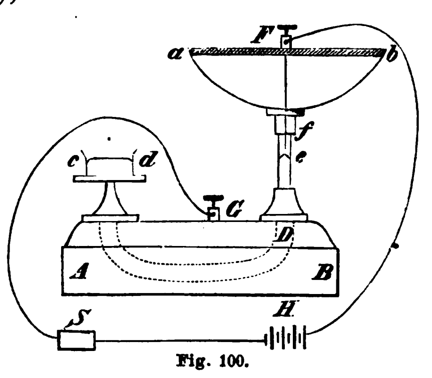


Fig. 100.

(Ausströmen der Gase.) Für die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit ist Seite 155 unter Voraussetzung einer engen Oeffnung in dünner Wand die Formel 104 $c = \sqrt{2gh}$ abgeleitet worden. Denken wir uns diese Formel auf verschiedene Flüssigkeiten angewendet, so führt sie uns zu dem bemerkenswerthen Ergebnisse, dass die Ausflussgeschwindigkeit vom specifischen Gewichte der Flüssigkeit unabhängig erscheint, dass also bei gleicher Druckhöhe z. B. Quecksilber ungeachtet des etwa 14mal grösseren Druckes an der Ausflussöffnung doch mit keiner grösseren Geschwindigkeit ausströmt als Wasser, da ja der Betrag des specifischen Gewichtes in der Formel gar nicht erscheint. Die Erklärung findet man sofort durch die Ueberlegung, dass mit der Vergrösserung des specifischen Gewichtes nicht nur der Druck,

*) Das Zwischenstück zwischen dem Postamente und dem Diffusionsgefässe ist hier aus Glas.

sondern eben auch in gleichem Masse die Trägheit der ausströmenden Flüssigkeit wächst, wesshalb eben das specifische Gewicht bei Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit aus der Rechnung fallen muss. Einem ähnlichen Resultate begegnen wir, wenn wir uns nun die Aufgabe stellen, die Geschwindigkeiten zu berechnen, mit welchen Gase ausströmen.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein Ausströmen in den leeren Raum stattfinde. Unter dieser Voraussetzung stelle A (Fig. 101) ein beliebiges Gefäss vor, in welchem sich ein Gas unter dem Drucke der Quecksilbersäule cb von der Höhe $= e$ befinde, während eine kleine Oeffnung bei o das Ausströmen, dessen Geschwindigkeit v sei, gestatte. Wir nehmen an, dass durch irgend eine Einrichtung die Expansivkraft des eingeschlossenen Gases constant erhalten werde oder denken uns unsere Betrachtung auf einen so kurzen Zeitraum eingeschränkt, dass wir, innerhalb desselben, von der Druckabnahme absehen können. Die Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit v gestaltet sich am einfachsten, wenn wir unser Problem auf dieselben Verhältnisse zurückführen, welche wir bei der Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit von Flüssigkeiten angenommen haben. Dort kam eben die Druckhöhe h der ausströmenden Flüssigkeit in Betracht, und wir wollen deshalb hier auch nach der Druckhöhe h fragen, welche eine Gasmasse von der Dichte d der im Gefässe A befindlichen, wenn sie nicht zusammendrückbar wäre, haben müsste, um denselben Druck auf die Flächeneinheit hervorzubringen, wie er in unserem Falle durch die Manometerhöhe gemessen wird. Es kommt also im vorliegenden Fall mit anderen Worten darauf an, die Quecksilbersäule von der Höhe e durch eine (als unzusammendrückbar angenommene) Gassäule von der gegebenen Dichte d und entsprechenden Höhe h aequilibrirt sich zu denken. Nennen wir D die Dichte des Quecksilbers, so ist diese Anforderung nach einem aus den Anfangsgründen bekannten Lehrsatze an die Bedingung geknüpft, dass $h : e = D : d$, somit $h = e\,\frac{D}{d}$, welchen Werth in die Torricelli'sche Formel einsetzend, wir

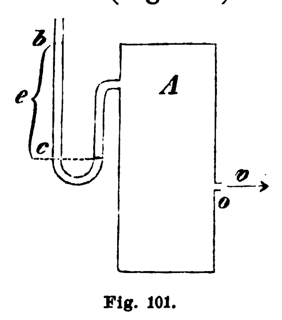


Fig. 101.

dann sofort die gesuchte Ausströmungsgeschwindigkeit v erhalten, gegeben durch den Ausdruck

$$v = \sqrt{2ge\,\frac{D}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 156)$$

ein Ausdruck, der sich nun leicht auf eine für die Anwendung und für weitere Schlussfolgerungen geeignetere Gestalt bringen lässt.

Vorerst wollen wir die specifische Expansivkraft η des ausströmenden Gases, oder vielmehr den Werth $\delta = \frac{1}{\eta}$ in unsere Formel einführen, was nach der bei Formel 151 gegebenen Definition und mit Zuhilfenahme des M.-G. Gesetzes mittelst der Gleichung $d = \delta \cdot \frac{e}{760(1+\alpha t)}$ geschieht, indem wir dabei die Manometerhöhe e auch als in Millimetern gemessen voraussetzen und annehmen, dass t^0 C die bei unserem Versuche herrschende Temperatur*) sei. Wir erhalten demnach

$$v = \sqrt{\frac{2gD\,760(1+\alpha t)}{\delta}} \quad \ldots\ldots \quad 157)$$

wobei, da δ vermöge Definition auf die normale Dichte der atmosphärischen Luft als Einheit bezogen ist, auch D auf diese Einheit bezogen sein und daher in runder Zahl = 10500 gerechnet werden muss.

Ohne auf die Correctionen einzugehen, welche hier aus ähnlichen Gründen wie beim Ausströmungsproblem von Flüssigkeiten anzubringen wären, um das Ergebniss der Rechnung mit dem Experimente genauer in Einklang zu setzen, bemerken wir, dass sich Formel 157 auf die einfache Gestalt

$$v = b\sqrt{\frac{1+\alpha t}{\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 158)$$

bringen lässt, oder auch

$$v = B\sqrt{\frac{T}{\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 159)$$

wobei b und B gewisse constante Werthe haben, während uns die Formel andererseits die directe Proportionalität der Ausströmungsgeschwindigkeit mit der Quadratwurzel aus der

*) Es handelt sich nämlich hier darum, von einer Gasdichte d bei t^0 C und e^{mm} Druck auf eine andere Gasdichte δ bei 0^0 C und 760^{mm} Druck überzugehen.

absoluten Temperatur und die verkehrte mit der Quadratwurzel aus der reducirten Gasdichte δ andeutet.

Denken wir uns das Gas in dem Raume A 2, 3, ... mal verdichtet, so könnte man bei oberflächlicher Beurtheilung zur Annahme verleitet werden, dass dann auch eine proportionale Vergrösserung der Ausströmungsgeschwindigkeit eintreten müsste, welche Annahme jedoch durch einen Blick auf unsere Formeln sofort widerlegt wird, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil mit der Vermehrung des Gasdruckes im Falle einer Compression in gleichem Masse das specifische Gewicht der eingeschlossenen Gasmasse wächst, wesshalb die Ausströmungsgeschwindigkeit,*) wie aus den am Eingange dieses § bezüglich der Flüssigkeiten gemachten Andeutungen ohne Weiteres hervorgeht, vom Drucke unabhängig bleiben müsste, wenn nicht durch die (bei Flüssigkeiten eben nicht vorkommende) Wiederausdehnung des austretenden Gases modificirende secundäre Wirkungen mit in's Spiel kämen. Welchen Einfluss diese haben, und wie andererseits das Problem sich gestaltet, wenn das Ausströmen nicht in den leeren Raum stattfindet und nicht durch eine einfache Wandöffnung, sondern, wie es gewöhnlich der Fall ist, durch eine Düse, — darüber verweisen wir auf die (für eine cylindrische Düse geltende) Weisbach'sche Formel.**)

Statt Formel 159 könnten wir auch schreiben:

$$v = B\sqrt{T\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 160)$$

wodurch die Proportionalität der Ausströmungsgeschwindigkeit mit der Quadratwurzel aus der specifischen Expansivkraft dargestellt ist. In der That hat Bunsen hierauf eine sehr sinnreiche und elegante Methode zur Ermittelung der specifischen Expansivkräfte der Gase durch Beobachtung ihrer Ausströmungsgeschwindigkeiten gegründet, oder vielmehr zur Ermittlung der (reducirten) Gasdichten δ_1 und δ_2 durch Vergleichung der Zeiten t_1 und t_2, welche zwei gleiche Volumina der zu vergleichenden Gase brauchen, um unter übrigens gleichen Umständen durch eine enge Oeffnung in einem Platinbleche auszuströmen, welches am oberen Ende eines das betreffende

*) Nicht so die Ausflussmenge, wie leicht einzusehen.

**) Man findet dieselbe mit wichtigen Folgerungen bereichert in der Abhandlung: Ueber den Ausfluss der Gase (Oesterr. Ingenieurverein 1873) von Prof. G. Schmidt eingehender discutirt.

Gas enthaltenden, mit Quecksilber gesperrten röhrenförmigen Recipienten eingesetzt ist, in welchem man das Quecksilber in beiden Versuchen um gleich viel steigen lässt, was mittelst eines Schwimmers beobachtet wird. Es besteht dann zwischen den Gasdichten und Ausströmungszeiten die einfache Beziehung:

$$\delta_1 : \delta_2 = t_1^2 : t_2^2 \quad \ldots \ldots \quad 161)$$

Beim Ausströmen der Gase durch capillare Röhren zeigen sich, wie zuerst aus Graham's Versuchen hervorgegangen, von den bisher erörterten Gesetzen ganz abweichende Erscheinungen, welche, wie dies auch bei den Flüssigkeiten der Fall ist, sowohl auf eine innere Reibung als auch auf eine Reibung an den Röhrenwänden hindeuten. Dabei ist die Reibungsconstante, wie Maxwell, O. E. Meyer und Stefan gezeigt haben, von der Gasdichte unabhängig.

(**Bewegung der erwärmten Luft in einem Kamine.**) Wenngleich die angeführten Formeln streng genommen nur unter den angegebenen Einschränkungen Geltung haben, so findet deren praktische Anwendung doch nicht selten unter Bedingungen statt, welche sich weit von den soeben erwähnten Voraussetzungen entfernen. Dessenungeachtet sind die Ergebnisse, zu welchen man in solchen Fällen gelangt, wenn auch mit bedeutenden Abweichungen von der Erfahrung behaftet, doch insofern nicht ohne Werth, als sie wenigstens in erster Annäherung und im grossen Ganzen über die Frage, um die es sich eben handelt, Licht verbreiten und theoretische Anhaltspunkte zu einem rationellen Vorgange beim Aufsuchen empirischer Formeln an die Hand geben. Von solcher Art ist z. B. die Anwendung der besagten Formeln bei der Beurtheilung der den Zug in einem Schornsteine bedingenden Verhältnisse. Wir wollen im Wesentlichen die Betrachtungen folgen lassen, von welchen man bei der Aufstellung diesbezüglicher Formeln auszugehen pflegt. Wir haben in einem solchen Falle ausserhalb und innerhalb des Schornsteines $ABCD$ (Fig. 102) Luft von verschiedenen Temperaturen, wir wollen annehmen beziehungsweise t_1 und t_2; andererseits haben wir von oben und unten ungleiche Druckkräfte, beziehungsweise P und $P + p_1$ wirksam, wenn wir den Druck auf die Flächeneinheit einer Luftsäule von der Höhe h des betrachteten Kamins ausserhalb desselben mit p_1 bezeichnen. Die Differenz dieser

beiden Druckkräfte, nämlich eben p_1, ist nun aber offenbar grösser als der Gegendruck p_2 auf die Flächeneinheit, welchen die erwärmte Luft im Kamine bei gleicher Druckhöhe h ausübt. Es ist demnach $p_1 - p_2$ die den Luftzug im Kamine bedingende Druckdifferenz. Zum Behufe der weiteren Entwickelungen wollen wir nun zunächst den Druck p_0 einer gleich hohen (h) Luftsäule von der Temperatur 0^0 mit den mehrfach erwähnten Druckkräften p_1 und p_2 vergleichen, wofür, da es sich um die Aenderung des specifischen Gewichtes mit der Temperatur handelt, offenbar die Beziehungen $p_1 = \frac{p_0}{1 + \alpha t_1}$ und $p_2 = \frac{p_0}{1 + \alpha t_2}$ Geltung haben, eine Relation, welche auch in der Form

Fig. 102.

$$p_1 - p_2 = \alpha p_0 \left[\frac{t_2 - t_1}{(1 + \alpha t_1)(1 + \alpha t_2)}\right]$$

dargestellt werden kann. Bedeutet nun s_0 das specifische Gewicht der Luft bei der Temperatur 0^0, so kann p_0 in unserer Formel durch $s_0 h$ ersetzt werden, wodurch wir erhalten $p_1 - p_2 = \alpha s_0 h \left[\frac{t_2 - t_1}{(1 + \alpha t_1)(1 + \alpha t_2)}\right]$. Die in solcher Weise in die Formel für die Druckdifferenz eingeführte Schornsteinhöhe h wollen wir nunmehr mit der Höhe h', einer Luftsäule von der inneren Temperatur t_2 vergleichen, welche nöthig sein würde, um der Druckdifferenz $p_1 - p_2 = q$ das Gleichgewicht zu halten. Das specifische Gewicht s' in einer solchen Luftsäule von der Temperatur t_2 würde offenbar $= \frac{s_0}{1 + \alpha t_2}$ sein, somit der Druck der Säule auf die Flächeneinheit $= h's' = h' \cdot \frac{s_0}{1 + \alpha t_2}$. Denken wir uns nun den Werth von h' so gewählt, dass die bereits erwähnte Bedingung $\frac{h' s_0}{1 + \alpha t_2} = q = p_1 - p_2 = \alpha s_0 h \left[\frac{t_2 - t_1}{(1 + \alpha t_1)(1 + \alpha t_2)}\right]$ erfüllt ist, so ergibt sich hieraus ohne Weiteres $h' = \alpha h \left(\frac{t_2 - t_1}{1 + \alpha t_1}\right)$. Die soeben berechnete Luftsäule von der Höhe h' und der inneren Temperatur t_2 ist also so beschaffen, dass sie den gleichen Druck ausübt, wie

die den Luftzug im Kamine bewirkende Druckdifferenz $p_1 - p_2$. Man erlaubt sich nun die Annahme, dass die erhitzte Luft im Kamine sich annähernd mit derselben Geschwindigkeit v hinaufschiebt, mit welcher das Ausströmen unter dem Drucke einer Luftsäule von der soeben angegebenen Beschaffenheit (h', t_2) vor sich gehen würde. Wir erhalten demnach mit Rücksicht auf die Erläuterung zu Formel 156 . . $v = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2g\alpha h\left(\frac{t_2 - t_1}{1 + \alpha t_1}\right)}$ folglich

$$v = \sqrt{2gh\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)} = \sqrt{2gh\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)} \quad . \quad . \quad 162)$$

d. h. die Zuggeschwindigkeit im Kamine ist proportional der Quadratwurzel seiner Höhe und der Quadratwurzel des Ueberschusses des absoluten Temperaturverhältnisses der inneren und äusseren Luft über die Einheit. Hiernach lassen sich die bedeutenden Verschiedenheiten, welche durch eine wärmere oder kältere Jahreszeit in dieser Hinsicht bedingt werden, sowie die Höhenverhältnisse von Kaminen, welche gewissen Anforderungen entsprechen sollen u. s. w., beurtheilen. Dabei darf aber nicht übersehen werden, dass wir für's Erste bei dieser Entwickelung schon von vornherein die Formeln für die Ausströmungsgeschwindigkeit auf Verhältnisse angewendet haben, unter welchen sie nach den im vorigen §. ausdrücklich gegebenen Andeutungen strenge genommen nicht mehr giltig sind, dass also die ganze Rechnung an sich von vornherein schon nur als eine erste Annäherung betrachtet werden kann, und dass andererseits vornehmlich durch die Reibung der Luft im Kamine Widerstände bedingt sind, auf welche unser Calcül keine Rücksicht genommen hat. Die abgeleiteten Formeln werden also durch Einführung von Erfahrungscoëfficienten in empirische Formeln umgestaltet werden müssen, wenn sie praktische Anwendungen finden sollen, worüber man in Lehrbüchern der technischen Mechanik nähere Aufschlüsse findet. Diese leichter zugänglich und verständlich zu machen, ist der Zweck der hier gegebenen Andeutungen, denn die oben gegebene Formel 162 ist in der That die Grundlage, von welcher man bei der Aufstellung der besagten empirischen Formeln für bestimmte Dimensionsverhältnisse, Formen und Materialbeschaffenheit der Schornsteine auszugehen pflegt.

(**Oberflächencondensation; Adhäsion.**) Es ist bekannt, dass feste Körper, welche von Gasen umgeben sind, an ihrer Oberfläche mit einer mehr oder weniger condensirten Schichte des sie umgebenden Gases bedeckt sind, in Folge der Anziehung, welche der feste Körper auf die Gasmolecüle, die sich unmittelbar an seiner Oberfläche befinden, äussert. Die in solcher Weise festgehaltene Gasmenge ist natürlich desto grösser, je ausgedehnter die condensirende Oberfläche ist, wesshalb diese Wirkung insbesondere bei porösen und pulverförmigen Körpern in hohem Grade sich geltend macht. Natürlich richtet sich dieselbe andererseits nach der materiellen Beschaffenheit des festen Körpers sowohl als auch des Gases, und es mag bemerkt werden, dass in letzterer Hinsicht die coërciblen Gase überwiegend der Oberflächencondensation unterliegen. Unter den festen Körpern stellt sich uns die Kohle als ein in dieser Richtung besonders bemerkenswerthes Beispiel dar, indem sie (geglüht und frisch abgelöscht) z. B. von Kohlensäure das 35fache Volumen in sich aufnimmt. Die Buxbaumkohle (von dieser gilt das Gesagte) ist deshalb auch zur experimentellen Nachweisung dieser Art von Absorptionserscheinungen sehr geeignet, indem man sie in ein oben geschlossenes Glasrohr einführt, in welchem sich Kohlensäure über Quecksilher als Sperrflüssigkeit befindet. Platin äussert gegenüber dem Sauerstoffe eine bedeutende Oberflächencondensation. Es beruht darauf bekanntlich die Wirkung des Platinschwammes bei der Döbereiner'schen Zünd-Maschine und im Allgemeinen das Vermögen des Platins, die Vereinigung von Wasserstoff mit Sauerstoff durch Oberflächencondensation herbeizuführen, eine Wirkung, welche man durch die mit der Oberflächencondensation verbundene Temperaturerhöhung erklärt.

Auf der Oberflächencondensation beruhen bekanntlich auch die Hauchbilder, welche man z. B. in der Art hervorrufen kann, dass man auf einer Glasplatte einige Zeit eine Münze, einen gravirten Stempel u. dgl. liegen lässt und nach dem Abheben die Glasplatte behaucht. Offenbar ist durch das Aufliegen des Stempels die an der Oberfläche condensirte Gasschichte anders angeordnet worden und tritt in Folge dessen auch eine ungleichmässige Oberflächencondensation gegenüber dem Wasserdampfe beim Behauchen ein, oder auch gegenüber

Quecksilberdämpfen, mit welchen man ebenfalls derartige Hauchbilder hervorrufen kann (Moser, Waidele).

Die Oberflächencondensation der Gase spielt ohne Zweifel eine sehr wichtige Rolle bei den Erscheinungen der Adhäsion der Körper, welche sich nach den neuesten Untersuchungen von Stefan aus einem ganz anderen Gesichtspunkte darstellen, als derjenige ist, aus welchem man sie bisher betrachtet hat. Man hielt die Messung der Adhäsion durch Anwendung von Zugkräften (Gewichten), welche die Trennung der Adhäsionsplatten bewirkten, für ein statisches Problem, während sie, wie Stefan gezeigt hat, vielmehr ein dynamisches ist, insofern nämlich die geringste Kraft hinreicht, die Trennung der Platten zu bewirken, wenn nur ihre Wirkungsdauer hinreichend lang ist, da eben die Zeit, binnen welcher die Trennung der Platten erfolgt, mit der angewendeten Zugkraft im verkehrten Verhältnisse steht. Man kann sich den Vorgang etwa so vorstellen, dass bei beginnender Wirkung der Zugkraft (dieselbe mag beliebig klein gewählt werden) zunächst eine wenn auch noch so kleine Distanzvergrösserung der Platten herbeigeführt wird, welche unmittelbar eine entsprechende Verdünnung (Dilatation) des zwischen den Platten befindlichen Mediums mit sich bringt. Dadurch wird aber ein Einströmen des umgebenden Mediums in den Zwischenraum in einem gewissen Betrage verursacht werden, während die constante Zugkraft neuerdings die Distanz der Platten nach und nach vergrössert und so zu fortwährenden Wiederholungen des eben beschriebenen Processes der Dilatation zwischen den Platten und des Einströmens zwischen dieselben Anlass gibt, bis endlich die vollständige Trennung der Platten erfolgt ist.

Wir schliessen das Kapitel über die Gase mit einigen Bemerkungen über die barometrische Höhenmessung und über die Reduction von Wägungen auf den luftleeren Raum.

(**Barometrische Höhenmessung.**) Uebertragen wir die im § über die Niveauflächen (Seite 142) durchgeführten Betrachtungen, die aber auch auf expansible Flüssigkeiten anwendbar sind, auf die atmosphärische Luft; nehmen wir ferner die z-Axe vertical an und rechnen die Werthe von z von der Erdoberfläche nach aufwärts positiv; und bemerken wir endlich, dass hier nur die Schwere als beschleunigende Kraft in Betracht kommt, — so vereinfacht sich zunächst die

Gleichung 83) $dp = \varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$, indem $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$ wird, zu dem Ausdrucke

$$\left.\begin{array}{r} dp = -\varrho g dz \\ \text{oder nach Gewichtseinheiten} \\ dp = -\varrho dz \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 163)$$

Verbindet man damit den Ausdruck des M.-G. Gesetzes $pv = RT$ d. i. $p = \frac{RT}{v} = \varrho RT$ (da ja ϱ die Masse der Volumseinheit also $= \frac{1}{v}$ ist), so erhält man durch Division beider Gleichungen und Multiplication mit -1

$$-\frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 164)$$

und durch deren Integration für eine Höhendifferenz H, an deren Enden oben und unten beziehungsweise die Drucke p_2 und p_1 stattfinden

$$\left.\begin{array}{r} l p_1 - l p_2 = \frac{H}{RT} \\ \text{oder in gemeinen Logarithmen} \\ \log p_1 - \log p_2 = \frac{H}{MRT} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 165)$$

wenn M den bezüglichen Modulus bedeutet.

Setzt man für die Drucke p_1 und p_2 die Barometerstände b_1 und b_2 an der unteren und oberen Station und lässt t die gewöhnliche Temperatur (im Gegensatze zur absoluten T) bedeuten, so erhält man mit Rücksicht auf die Werthe $M = 2 \cdot 30$ und $R = 29 \cdot 27$

$$H = 67 \cdot 32 \,(\log b_1 - \log b_2)\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) \quad \ldots \quad 166)$$

Lässt man nun, wie üblich, als Temperatur der Luft das Mittel der Temperaturen t_1 und t_2 an der unteren und oberen Station gelten und hebt $\frac{1}{\alpha} = 273$ als Factor heraus, so wird wegen $67 \cdot 32 \times 273 = 18378$

$$H = 18378 \,(\log b_1 - \log b_2)\left(1 + \frac{t_1 + t_2}{2 \times 273}\right) \quad \ldots \quad 167)$$

Mit Rücksicht auf die stets mehr oder weniger feuchte Luftbeschaffenheit nimmt man den Ausdehnungscoëfficienten $\alpha = \frac{1}{273}$

etwas grösser, also für 273 eine etwas kleinere Zahl (250) an. Schreibt man ferner, wie gewöhnlich, für b_1 und b_2, t_1 und t_2 beziehungsweise B und b, T und t (wobei also T nicht mehr, wie früher, die absolute Temperatur bedeutet) und setzt für den später genauer festzustellenden Coëfficienten einstweilen die runde Zahl 18400 ein, so erhält man die Formel

$$H = 18400\left(1 + \frac{T+t}{500}\right)(\log B - \log b) \quad . \quad . \quad 168)$$

Der Coëfficient 18400 enthält, wie Gleichung 165 lehrt, die Grösse R als Factor, welche nach Formel 124 und 125 dem Volumen der Gewichtseinheit Luft bei normalem Drucke proportional ist. Wird nun dieser Druck, sowie die vermöge der Gleichung 164 in Betracht kommenden Drucke (Barometerstände) durch eine Quecksilbersäule gemessen, so muss der besagte barometrische Coëfficient (18400 nach unserer vorläufigen Annahme) — wir wollen ihn im Allgemeinen A nennen — wesentlich vom Dichtigkeitsverhältnisse zwischen Luft und Quecksilber abhängen und somit auch von allen Umständen, welche dieses Dichtigkeitsverhältniss beeinflussen können. Hiebei kommt zunächst die Temperatur zu erwägen, der wir bereits durch Einführung des Coëfficienten $\left(1 + \frac{T+t}{500}\right)$ Rechnung getragen haben, da wir das Gesetz nicht näher kennen, nach welchem die Temperatur in verticaler Richtung aufwärts abnimmt.

Weiterhin kommt noch eine Correction wegen der geographischen Breite anzubringen, deren Einfluss auf den barometrischen Coëfficienten aus folgender Erwägung hervorgehen wird. Man denke sich (wir wollen annehmen, um die Bedingungen zu vereinfachen, im leeren Raume) ein heberförmig gebogenes Rohr (Fig. 103), welches zwei Flüssigkeiten von verschiedener Beschaffenheit und Dichte und zwar eine zusammendrückbare von geringerer und eine unzusammendrückbare von grösserer Dichte enthalte. Wir betrachten die beiden Flüssigkeiten unter dem Einflusse der

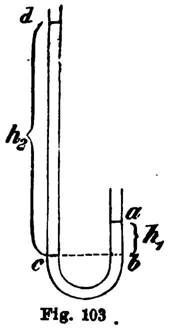


Fig. 103.

Anziehungskraft der Erde, in welchem Falle den beiden Flüssigkeiten entsprechende specifische Gewichte, z. B. S der schwereren, unzusammendrückbaren, σ der leichteren, zusammendrück-

baren zukommen werden. Die Flüssigkeiten werden sich dann im Rohre nach einem bekannten Lehrsatze der Hydrostatik so anordnen müssen, dass $\frac{cd}{ab} = \frac{S}{\sigma}$. Denken wir uns nun, die Anziehung der Erde auf die Flüssigkeiten werde aus irgend einer Ursache grösser. Wären beide Flüssigkeiten unzusammendrückbar, so würden die specifischen Gewichte derselben im gleichen Verhältnisse wachsen und das Höhenverhältniss $\frac{cd}{ab}$ dasselbe bleiben; ist aber die Flüssigkeit vom specifischen Gewichte σ zusammendrückbar, aber die andere nicht, so wird σ in einem rascheren Verhältnisse wachsen als S und in Folge dessen der absolute Werth des Verhältnisses $\frac{S}{\sigma} = \frac{cd}{ab}$ vermindert werden, d. h. es wird dann ein kürzeres cd einem gewissen ab das Gleichgewicht halten, als wenn das Verhältniss der specifischen Gewichte ungeändert geblieben wäre. In unserem Falle bei der barometrischen Höhenmessung ist nun das Quecksilber die unzusammendrückbare, die Luft die zusammendrückbare Flüssigkeit und die Abhängigkeit der Acceleration der Schwere von der geographischen Breite die Ursache, welche eine Verschiedenheit des Dichtenverhältnisses $\frac{S}{\sigma}$ und somit auch eine Verschiedenheit des barometrischen Coëfficienten A in verschiedenen Breiten bedingt. Das Dichteverhältniss $\frac{S}{\sigma}$, somit auch der damit proportionale barometrische Coëfficient A werden, wie aus der soeben durchgeführten Betrachtung einleuchtet, mit dem Werthe der Acceleration g der Schwere in verkehrtem Verhältnisse stehen müssen, und wenn wir den von uns angenommenen Werth 18400 für die mittlere Breite von 45° gelten lassen und entsprechend mit A_{45} bezeichnen, so wird der barometrische Coëfficient A_φ für eine andere Breite φ durch die Gleichung $A_\varphi = A_{45} \frac{g_{45}}{g_\varphi}$ zu finden sein. Mittelst Formel 34 (Seite 72) erhalten wir demnach:

$$A_\varphi = A_{45} \frac{9{,}78(1 + 0{,}0052 \sin^2 45)}{9{,}78(1 + 0{,}0052 \sin^2 \varphi)} = A_{45} \cdot \frac{1{,}0026}{1 + 0{,}0052 \sin^2 \varphi} \quad . \quad 169)$$

Diese Formel lässt sich mittelst der bekannten Relation $\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ in die folgende umgestalten:

$$A_\varphi = A_{45} \cdot \frac{1{,}0026}{1{,}0026 - 0{,}0026 \cos 2\varphi},$$

was, wenn man sich bei der Ausführung der Division auf die zwei ersten Glieder (mit Weglassung der sehr kleinen späteren) beschränkt: $A_\varphi = A_{45}(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi)$ liefert, wodurch man nunmehr die vollständige Höhenformel

$$H^m = 18400\left(1 + \frac{T+t}{500}\right)(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi)(\log B - \log b) \quad . \ 170)$$

erhält.

Ist eine genau gemessene (geodätisch bestimmte) Höhe H gegeben, so können correspondirende Beobachtungen an der unteren und oberen Station umgekehrt dazu dienen, jenen Mittelwerth des barometrischen Coëfficienten A ausfindig zu machen, mit dessen Einführung die barometrische Höhenformel die am besten stimmenden Resultate liefert. Man hat auf diese Art empirische Correctionen des barometrischen Coëfficienten vorgenommen, für welchen von verschiedenen Autoren verschiedene, jedoch von der runden Zahl 18400 wenig abweichende Werthe, in deren Aufzählung wir jedoch nicht weiter eingehen wollen, angegeben werden.

Dagegen soll noch eine für geringe Höhen sehr bequeme Näherungsformel (von Babinet) Erwähnung finden, welche sich aus der Formel 168 in folgender Weise ableiten lässt. Entwickelt man den Werth $(\log B - \log b) = \log \frac{B}{b}$ mittelst der bekannten Reihe

$$\log z = 2m\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right],$$

so erhält man mit Rücksicht auf den bekannten Moduluswerth m für $\log \frac{B}{b}$ den Werth

$$0{,}868 \left[\left(\frac{\frac{B}{b} - 1}{\frac{B}{b} + 1}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{B}{b} - 1}{\frac{B}{b} + 1}\right)^3 + \cdots\right]$$

folglich, wenn man sich auf das erste Glied beschränkt und abkürzt: $\log \frac{B}{b} = (\log B - \log b) = 0{,}868 \cdot \frac{B-b}{B+b}$. Durch Einsetzung dieses Werthes in die obige Formel 168 erhält man mit Abrundung des Productes $18400 \cdot 0{,}868$ auf die Zahl 16000 die Babinet'sche Formel

$$H^m = 16000 \frac{B-b}{B+b}\left(1 + \frac{T+t}{500}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 171)$$

eine sehr vereinfachte Formel, welche bis zu Höhen von etwa 1200 Metern hinlänglich genau ist.

Bei der Ausführung barometrischer Höhenmessungen sind vor Allem correspondirende gleichzeitige Barometerstandsbeobachtungen an beiden Stationen zu empfehlen. Sind solche nicht ausführbar und ist man darauf angewiesen, eine Höhenmessung ohne Mitwirkung eines zweiten Beobachters auszuführen, so wird man in der Art vorgehen, dass man erst eine Barometerstandsbeobachtung an der unteren Station vornimmt, sodann an der oberen und schliesslich wieder nach der unteren Station zurückkehrt, um daselbst eine zweite Barometerstandsbeobachtung vorzunehmen. Bei passender Zeiteintheilung wird der aus den beiden Beobachtungen an der unteren Station gezogene Mittelwerth das Ergebniss einer mit der Beobachtung an der oberen Station gleichzeitig ausgeführten Beobachtung annähernd ersetzen können.

Die Barometer haben theils eine solche Einrichtung, dass die Kugel des beigegebenen Thermometers vom Quecksilber des Barometers umgeben ist und also unmittelbar die Temperatur des letzteren angibt, welche, wenn man mit der Barometerstandsablesung, am Beobachtungsorte angelangt, hinreichend lange abgewartet hat, auch als Temperatur der Luft gelten kann. Häufig ist jedoch das dem Barometer beigegebene Thermometer mit dem Quecksilber des Barometers nicht in Berührung und gibt sonach zunächst die Lufttemperatur an, welche unter der soeben erwähnten Bedingung auch als Temperatur des Quecksilbers gelten kann.

Dass die gleichen Höhenunterschieden entsprechenden Aenderungen des Barometerstandes bei Erhebung in verticaler Richtung proportional dem Barometerstande abnehmen, geht sowohl aus der Ableitung der Höhenformel als auch aus der Differentiation derselben hervor.

Bekanntlich gestattet die Abhängigkeit des Siedepunktes vom Drucke (Wasser siedet unter 76^{cm} Druck bei $100^0 C$ unter 67^{cm} Druck bei $96{,}5^0 C$, unter 60^{cm} Druck bei $93{,}5^0 C$ u. s. w.) auch eine sogenannte thermometrische Höhenmessung und wird ein zu solchen Siedepunktsbestimmungen zweckmässig eingerichtetes, mit den nöthigen Hilfsgeräthschaften versehenes

Thermometer ein Thermobarometer genannt. Da jedoch solche Messungen weniger genau sind, als jene mit dem Barometer selbst, so wollen wir darauf nicht weiter eingehen.

Bei der Berechnung der Höhe eines Ortes über der Meeresfläche kommt es natürlich darauf an, den mittleren Barometerstand des betreffenden Ortes für b und den mittleren Barometerstand an der Meeresfläche (man nimmt dafür 762^{mm}) für B in die Höhenformel einzusetzen.

Die Reduction der Barometerstände von der Beobachtungstemperatur auf die Temperatur $0^0\ C$ (wegen Ausdehnung des Quecksilbers) kann mittelst eigens zu diesem Zwecke angefertigter Tafeln leicht bewerkstelligt werden. Man findet solche, sowie auch Hilfstafeln zur Ausrechnung barometrischer Höhenmessungen in den diesbezüglichen Werken von Jelinek (Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen), Kořistka (Neue Tafeln zur schnellen Berechnung barometrisch gemessener Höhen) u. s. w.

Näheres über die bei barometrischen Höhenmessungen zu beobachtenden Vorsichten, z. B. Aufstellung der Barometer, deren Handhabung dabei sowie beim Transporte u. s. w. überlassen wir der Nachlese in ausführlicheren physikalischen Lehr- oder Wörterbüchern, sowie die Erörterungen über verschiedene Einrichtungen von Barometern, sowohl Quecksilber- als auch Federbarometern (Aneroide oder holosterische Barometer genannt), insofern dies alles nicht ohnedies schon als bekannt vorauszusetzen ist.*)

(**Gewichtsverlust der Körper in der Luft.**) Mit Uebergehung der Lehre von den Aërostaten, welche in den Grundzügen wohl als bekannt angenommen werden kann, deren eingehendere Behandlung aber für unsere Zwecke nicht nöthig erscheint, soll hier nur die Reduction von Wägungen auf den luftleeren Raum mit einigen Worten erwähnt werden.

Wir setzen voraus, dass die Gewichte, deren wir uns bedienen, so justirt sind, dass sie im luftleeren Raume das wahre Nominalgewicht haben würden. Da nun andererseits auch der abgewogene Körper einen Gewichtsverlust in der Luft

---

*) Siehe die einschlägigen Artikel des Verfassers (Aneroid, Barometer) in der dritten Auflage von Karmarsch und Heeren's technischem Wörterbuche; redigirt von Kick und Gintl.

(bekanntlich gleich dem Gewichte des von ihm verdrängten Luftvolumens) erleidet, so vergleichen wir beim gewöhnlichen Verfahren der Wägung das scheinbare Gewicht des abgewogenen Körpers mit dem scheinbaren Gewichte der Gewichtsstücke. Es sei in einem gegebenen Falle p die an den Gewichtsstücken abgelesene Zahl von Grammen, während s das specifische Gewicht (Gewicht eines Kubikcentimeters) vom Material der Gewichtsstücke und σ das specifische Gewicht der Luft bedeuten mag. Es ist dann offenbar $\frac{p}{s}$ das Volumen, somit $\frac{p}{s} \cdot \sigma$ der Gewichtsverlust und $p\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)$ das scheinbare Gewicht der Gewichtsstücke. Aus gleichen Gründen wird das scheinbare Gewicht des abgewogenen Körpers durch $P\left(1 - \frac{\sigma}{S}\right)$ dargestellt werden, wenn man mit P das wahre, auf den luftleeren Raum reducirte und mit S das specifische Gewicht des abgewogenen Körpers bezeichnet. Man findet demnach das gesuchte auf den luftleeren Raum reducirte Gewicht durch die Formel

$P = p \frac{1 - \frac{\sigma}{s}}{1 - \frac{\sigma}{S}}$. Führt man die Division aus, indem man sich auf die drei ersten Glieder (mit Weglassung der verhältnissmässig sehr kleinen späteren*) Glieder) beschränkt, so gelangt man zur Reductionsformel

$$P = p\left(1 + \frac{\sigma}{S} - \frac{\sigma}{s}\right) \quad \ldots\ldots \quad 172)$$

wobei wiederholt bemerkt werden mag, dass p das an den Gewichtsstücken unmittelbar abgezählte Nominalgewicht ist (wahres Gewicht der abgezählten Gewichtsstücke im luftleeren Raume). Für ein bestimmtes Material der Gewichtsstücke, z. B. für Messing, erhält dann s ein für alle mal einen constanten Werth. Ueber das specifische Gewicht σ der Luft ist das Nöthige bereits ausführlich gesagt worden.

Die vorstehenden Formeln sprechen zugleich die Theorie des sogenannten Dasymeters oder Wagemanometers aus, einer im Wesentlichen schon von Guericke erdachten Vorrichtung, bestehend aus einem Wagebalken, der einerseits einen grossen, ringsum geschlossenen Glasballon und anderer-

*) Von der 2. Ordnung aufwärts.

seits ein Gegengewicht (aus Blei oder Messing) trägt. Der Wagebalken senkt sich auf der Seite des Ballons oder des Gegengewichts, je nachdem eine Abnahme oder Zunahme des Luftdruckes eintritt. Man hat in neuerer Zeit den Gedanken wieder aufgenommen — und dieser Umstand veranlasst uns vornehmlich, der beschriebenen Vorrichtung zu erwähnen — das Wagemanometer durch entsprechende Vervollkommnungen in ein Präcisionsinstrument für genaue Beobachtungen der Variationen des Luftdruckes umzugestalten.

Anhang zur Mechanik.

(**Gesetz der Flächen.**) Wir untersuchen, um vorerst an leicht übersichtlichen concreten Beispielen gewisse Grundbegriffe zu erläutern, zunächst einen ganz speciellen Fall und wollen später auf eine allgemeinere Auffassung des in Rede stehenden Theorems eingehen.

Nach Formel 15 gilt für einen um eine feste Axe drehbaren Körper vom Trägheitsmomente T die Relation $\frac{d\omega}{dt} = \frac{PR}{T}$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit, also $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung bedeutet und PR die Summe der Drehungsmomente darstellt, die auf den Körper einwirken, welche Summe wir kurz mit D bezeichnen wollen. Drücken wir ferner das Trägheitsmoment T durch $\Sigma m r^2$ aus, wobei die m die Massen der Körpertheilchen und die r deren Abstände von der Axe sind, so erhält der obige Ausdruck die Gestalt $\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 = D$.

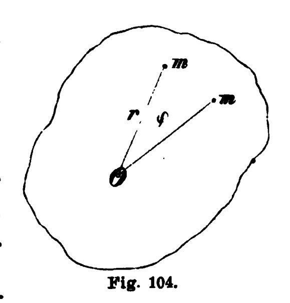


Fig. 104.

— Der Abstand r eines jeden Massentheilchens m von der Axe O (Fig. 104) macht bei der Drehung innerhalb eines bestimmten Zeitintervalles t eine Winkelbewegung φ und innerhalb des folgenden Zeitelementes dt eine Winkelbewegung $d\varphi$, welche

der Relation $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ also $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ entspricht, wodurch obige Gleichung die Form annimmt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Sigma m r^2 = D \quad \ldots \ldots \ldots \quad 173)$$

Denkt man sich die Axe O als die z-Axe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems und vom Ursprunge desselben Leitstrahlen ϱ zu den einzelnen Massentheilchen m gezogen, so sind die Projectionen dieser Leitstrahlen ϱ auf die xy-Ebene den vorhin erwähnten Abständen r von der z-Axe gleich. Bei der betrachteten Drehbewegung beschreibt jeder Leitstrahl ϱ innerhalb eines Zeitelementes dt eine sehr kleine Fläche, deren Projection auf die xy-Ebene der Fläche gleich sein wird, die innerhalb desselben Zeitelementes von der Projection des ϱ (nämlich r) in der xy-Ebene beschrieben worden ist. Diese Fläche ist offenbar $\frac{r^2 d\varphi}{2}$ und kann betrachtet werden als das Differentiale einer innerhalb eines endlichen Zeitraumes t beschriebenen endlichen Fläche $f = \frac{r^2 \varphi}{2}$.

Durch zweimalige Differentiation und beiderseitige Multiplication mit $2m$ liefert dieser Ausdruck für f die Gleichung

$$2m \frac{d^2 f}{dt^2} = m r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Addirt man die analogen Gleichungen für sämmtliche Massentheilchen des in der betrachteten Drehbewegung befindlichen Körpers, so erhält man

$\Sigma 2m \frac{d^2 f}{dt^2} = \Sigma m r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ oder, weil die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ für alle Theilchen denselben Werth hat

$$\Sigma 2m \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Sigma m r^2 = D$$

oder

$$\frac{d^2}{dt^2} \Sigma 2mf = D \quad \ldots \ldots \ldots \quad 174)$$

Integrirt man diese Gleichung (nach den in der mathematischen Einleitung Formel 72 bis 74 gegebenen Regeln) so erhält man

$$\frac{d}{dt} \Sigma 2mf = Dt + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad 175)$$

$$\Sigma 2mf = \frac{Dt^2}{2} + Ct + C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176)$$

wobei C und C' Integrationsconstante sind, deren Bestimmung davon abhängt, dass man über den Werth von $\Sigma 2mf$ für bestimmte Werthe von t gewisse Annahmen macht. Uebrigens setzen wir bei dieser Integration voraus, dass es innerhalb des betrachteten Zeitintervalles gestattet sei, D als constant anzusehen.

Denkt man sich ferner den Körper in lauter unter sich gleiche Massenelemente m zerlegt, so kann man links vom Gleichheitszeichen auch $2m\Sigma f$ als Ausdruck einer mit $2m$ multiplicirten Flächensumme schreiben.

Die soeben gewonnenen Resultate lassen sich wesentlich verallgemeinern, wenn wir nunmehr die Bewegung eines (freien) Systems von Massen betrachten, wie wir es bei der Ableitung der Sätze von der Bewegung des Schwerpunktes angenommen haben, eines Systems, dessen Theile gegeneinander beweglich und von beliebigen inneren und äusseren Kräften beherrscht sein können.*)

Wir denken uns auch hier jedes Massentheilchen m mit dem Ursprunge O durch Leitstrahlen ϱ verbunden und diese Leitstrahlen zunächst auf die xy-Ebene projicirt. Es seien (Fig. 105) OB und OC die Projectionen eines solchen Leitstrahles zu Anfang und Ende eines Zeitelementes dt und somit OBC das betreffende Flächendifferentiale

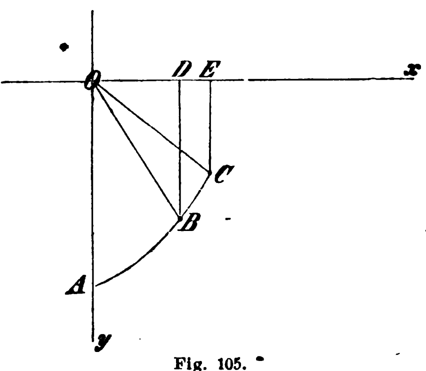


Fig. 105.

*) Um bei den nachfolgenden Betrachtungen die Ideen zu fixiren und bestimmte Fälle der Anwendung vor Augen zu haben, denke man beispielsweise an das Planetensystem oder an die Bewegungen eines frei im Raume schwebenden oder auf einer Unterlage befindlichen Thieres oder Mechanismus. Im letzteren Falle wird man den Widerstand der Unterlage als eine den Normaldruck der Schwere aufhebende Kraft und, wenn die Unterlage nicht ganz glatt ist, die auftretenden Reibungswiderstände eben auch als äussere Kräfte, die auf das System einwirken, ansehen müssen. Dasselbe gilt vom Mittelwiderstande.

df, welches wir als Differentiale des Sectors AOB betrachten können, insofern wir die Bewegung der Projection des betreffenden Massentheilchens von A aus verfolgen. Offenbar ist Sector AOB = Fläche $OABD$ — Fläche $OBD = \int y\,dx - \frac{xy}{2}$ also df gleich dem Differentiale dieser Grösse, nämlich $df = y\,dx - \left(\frac{y\,dx}{2} + \frac{x\,dy}{2}\right)$ und daher $y\,dx - x\,dy = 2\,df$. Mit Einführung des Zeitdifferentiales dt können wir auch schreiben:

$$\frac{dx}{dt} \cdot y - \frac{dy}{dt} \cdot x = 2\frac{df}{dt} \quad \ldots\ldots \quad 177)$$

eine Relation, von der wir weiterhin Gebrauch machen werden.

Kehren wir nämlich auf die allgemeinen Bewegungsgleichungen 61 zurück und erinnern wir uns, dass diese durch Summirung aus den für ein einzelnes Massentheilchen geltenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 178)$$

hervorgehen, wobei X, Y und Z die Summen aller auf das betrachtete Theilchen einwirkenden Kraftcomponenten vorstellen, welche beziehungsweise den drei Axen parallel sind.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit y, die zweite mit x und zieht letztere von ersterer ab, so erhält man

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,y - \frac{d^2y}{dt^2}\,x\right) = (Xy - Yx) \quad \ldots \quad 179)$$

oder durch Summirung

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,y - \frac{d^2y}{dt^2}\,x\right) = \Sigma(Xy - Yx) \quad . \quad 180)$$

Hier stellt ΣXy die Momentensumme aller Kraftcomponenten dar, welche, am betrachteten Theilchen m angreifend, im Sinne einer Drehung nach links um die z-Axe wirken und ΣYx die Momentensumme der rechtsdrehenden Kraftcomponenten, folglich $\Sigma(Xy - Yx)$ das gesammte hinsichtlich der z-Axe in Betracht kommende Drehungsmoment, welches wir etwa mit $D_{(z)}$ bezeichnen könnten.

Anderseits kann der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen auch in der Form $\frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\,y - \frac{dy}{dt}\,x\right)$ folglich nach obiger Relation 177 auch in der Form $\frac{d}{dt}\,\Sigma 2m\,\frac{df}{dt}$ oder $\frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma 2mf$ geschrieben werden, wobei wir dem f, um anzudeuten, dass es in der xy-Ebene liegt, noch den Index (xy) beifügen wollen. Wir kommen auf diese Art zur Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma 2mf_{(xy)} = D_{(z)} \quad \ldots \ldots \quad 181)$$

welche der, im zuerst betrachteten speciellen Falle gewonnenen (Nr. 174) ganz analog ist.

Durch entsprechende beiderseitige Multiplication und Subtraction der Gleichungen 180 erhält man bezüglich aller drei Coordinatenaxen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,y - \frac{d^2y}{dt^2}\,x\right) &= \Sigma(Xy - Yx) \\ \Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\,z - \frac{d^2z}{dt^2}\,y\right) &= \Sigma\,(Yz - Zy) \\ \Sigma m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\,x - \frac{d^2x}{dt^2}\,z\right) &= \Sigma(Zx - Xz) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 182)$$

oder in anderer Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma 2mf_{(xy)} &= D_{(z)} \\ \frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma 2mf_{(xz)} &= D_{(y)} \\ \frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma 2mf_{(yz)} &= D_{(x)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 183)$$

Durch Integration würden sich den Gleichungen 175 und 176 analoge Gleichungen für die drei Axen ergeben.

Man kann daher jene Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,\Sigma 2mf = Dt + C \\ \text{und} \quad &\Sigma 2mf = \frac{Dt^2}{2} + Ct + C' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 184)$$

indem man sich dieselben auf eine beliebige Axe bezogen und auf die Bewegung eines beliebigen Systems angewendet denkt,

auch im Allgemeinen als Ausdruck des Gesetzes der Flächen ansehen.

Dabei stellt $\Sigma 2mf$, wie vorhin, die doppelte Summe der Producte vor, der Massen m aller Theilchen mit den in der Projectionsebene von den Projectionen der Leitstrahlen der betreffenden Theilchen beschriebenen Flächen, während D die Summe der Drehungsmomente bezüglich der auf jene Projectionsebene senkrechten Axe bedeutet. Diese Flächensumme, die unter Voraussetzung gleicher Massentheilchen m auch in der Form $2m\Sigma f$ dargestellt werden kann, wächst in einem speciellen Falle, der ein besonderes Interesse darbietet, proportional mit der Zeit. Dieser specielle Fall ist der, wenn $D = 0$, also nach 176 (184) $\Sigma 2mf = Ct + C'$ ist. Dieses Nullwerden der Grösse D fände statt, wenn die Richtungen aller auf die Massentheilchen m wirkenden äusseren Kräfte der betrachteten Axe parallel wären, oder dieselben schneiden, also z. B. durch den Coordinaten-Ursprung gehen würden, oder endlich, wenn überhaupt keine äusseren Kräfte auf den betrachteten Körper einwirkten, sondern nur innere Kräfte zwischen den Theilchen desselben thätig wären. Die Drehungsmomente der inneren Kräfte heben sich nämlich aus bereits mehrfach erörterten Gründen paarweise gegenseitig auf.

Wir können die Grösse $\frac{d}{dt}\Sigma 2mf = Dt + C$ (Formel 184), insofern sie ein Mass ist für die Geschwindigkeit des Wachsens der Flächensumme mit der Zeit, gewissermassen als Flächengeschwindigkeit bezeichnen, während wir die Grösse $\frac{d^2}{dt^2}\Sigma 2mf = D$ (Formel 183) die Flächenbeschleunigung nennen wollen. Da innere Kräfte zum Betrage von D, wie wir gesehen haben, keinen Beitrag liefern können, und C eine Constante ist, welche eben den Anfangswerth der Flächengeschwindigkeit für $t = 0$ vorstellt, so kann die Flächengeschwindigkeit durch das Spiel innerer Kräfte überhaupt nicht verändert werden. Ist in dem betrachteten Systeme von Massen von vornherein keine Drehbewegung, somit auch keine Flächengeschwindigkeit vorhanden gewesen, so kann durch das Spiel innerer Kräfte auch keine entstehen. Eine auf einer absolut glatten Unterlage (Eisfläche) stehende Person kann sich also durch beliebige Bewegungen ihrer Körpertheile in keine Drehbewegung versetzen. Die Bewegung gewisser Körpertheile

z. B. der Arme nach rechts ist nicht möglich ohne gleichzeitig die Bewegung anderer Körpertheile nach links und zwar in der Art hervorzubringen, dass die der Gesammtbewegung entsprechende Flächensumme Null ist. Die in entgegengesetztem Sinne auftretenden Flächensummen heben sich nämlich hier gegenseitig auf, wie es ja auch die Natur der inneren Kräfte bedingt, deren Drehungsmomente sich paarweise tilgen.

Eine Schlussfolgerung, welche ganz analog derjenigen ist, die uns überzeugt hat, dass unter solchen Umständen durch innere Kräfte auch keine Progressivbewegung (Bewegung des Schwerpunktes) herbeigeführt werden kann.

Anders verhält es sich, wenn Reibungswiderstände vorhanden sind, welche den Extremitäten unseres Körpers Haftpunkte darbieten; diese Widerstände machen sich nämlich als äussere Kräfte geltend, die z. B. beim Anstemmen der Extremitäten durch Muskelbewegungen, also durch innere Kräfte, wachgerufen werden, und die angestrebte Drehbewegung oder Progressivbewegung herbeiführen.

Die Gleichungen 182 lassen sich auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}y-\frac{dy}{dt}x\right)&=\Sigma(Xy-Yx)\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}z-\frac{dz}{dt}y\right)&=\Sigma(Yz-Zy)\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}x-\frac{dx}{dt}z\right)&=\Sigma(Zx-Xz) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 185)$$

schreiben. Sind äussere Kräfte, welche auf das System wirken, nicht vorhanden, also die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen Null, so sind die Summen, deren Differentialquotienten nach der Zeit links vom Gleichheitszeichen stehen, constant. Diese Summen sind aber die Summen der Momente der Bewegungsgrössen aller Massentheilchen bezüglich der betrachteten Axe und gestatten daher noch eine andere Ausdrucksweise der Flächensätze, die sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergibt.

In dem speciellen Falle der Centralbewegungen der Planeten ist das Gesetz der Flächen aus Beobachtungen nachgewiesen worden, und hat im zweiten Keppler'schen Gesetze seinen Ausdruck gefunden. Dieses Gesetz spricht ein charakteristisches Merkmal einer Centralbewegung aus, welches in

den hier vorgetragenen Principien seine theoretische Begründung findet. Wir haben dieses Gesetz der Centralbewegung bei Besprechung des Satzes der Erhaltung der Kraft aus einem anderen Gesichtspunkte erwähnt.

Denkt man sich die Bewegungen eines freien Systems, z. B. des Planetensystems, auf verschiedene (etwa durch den Schwerpunkt gelegte) Projectionsebenen bezogen, so bietet sich die Frage dar nach derjenigen Ebene, für welche die Flächensumme ein Maximum wird. Laplace hat gelehrt, dass die Richtung dieser Ebene unabhängig von der Zeit ist, und hat sie desshalb die unveränderliche Ebene genannt. Zur näheren Erläuterung des angeführten Beispieles müssen wir noch erinnern, dass der Schwerpunkt des Planetensystems, den wir hier als Coordinatenursprung angenommen haben, insofern wir von der Einwirkung fremder Himmelskörper auf das Planetensystem absehen dürfen, entweder als unbeweglich oder als geradlinig und gleichförmig fortschreitend gedacht werden kann. — Die durch astronomische Beobachtungen gestützten Annahmen hinsichtlich der progressiven Bewegung des Planetensystems zu erörtern, gehört nicht hierher.

Sehr instructive Bemerkungen über die Schwerpunkts- und Flächensätze und deren experimentelle Nachweisung finden sich in Mach's „Grundlinien der Lehre von den Bewegungsempfindungen“.

(**Bewegungsgrösse und Antrieb.**) Bewegt sich ein Massenelement m, beherrscht von Kräften, deren zur x-Axe parallele Componentensumme wir mit X bezeichnen, so gilt nach Formel 178 die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$$

Schreibt man dieselbe in der Gestalt

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) = X \text{ oder } d\left(m \frac{dx}{dt}\right) = X dt$$

so erscheint die Grösse $X dt$ als das Differentiale der Bewegungsgrösse, welche dem betrachteten Massenelemente parallel der x-Axe innewohnt, da $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit in der bezeichneten Richtung vorstellt.

Nennt man in gleicher Weise F die einer beliebigen Rich-

tung parallele Componentensumme (wir könnten auch sagen, den auf die gedachte Richtung projicirten Beschleunigungsdruck) und führt man für die auf dieselbe Richtung projicirte Bewegungsgeschwindigkeit das Zeichen v ein, so erhält man die analoge Gleichung

$$d(mv) = F dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 186)$$

Man nennt dieses Product des in Betracht kommenden Beschleunigungsdruckes mit dem Zeitelemente den Antrieb jenes Druckes, nämlich der Kraft F. Ist v_0 die Geschwindigkeit für $t = 0$, so ergibt sich durch Integration

$$mv - mv_0 = \int_0^t F dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187)$$

und durch Ausdehnung auf ein System von Massentheilchen

$$\Sigma mv - \Sigma mv_0 = \int_0^t \Sigma F dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 188)$$

Dabei sind nur die äusseren Kräfte zu berücksichtigen, da die Projectionen der inneren sich paarweise aufheben.

Es ist daher der Gesammtzuwachs der auf eine bestimmte Richtung projicirten Bewegungsgrössen während eines beliebigen Zeitintervalles gleich der Summe der Gesammtantriebe der auf dieselbe Richtung projicirten äusseren Kräfte innerhalb derselben Zeit.

Ist für ein System von Massen, da es sich in Ruhe befindet, die Summe der Bewegungsgrössen für die ins Auge gefasste Richtung Null, und tritt sodann in Folge innerer Kräfte, jedoch mit Ausschluss äusserer Kräfte (in welchem Falle also $\Sigma F = 0$ ist), eine relative Bewegung der Theile des Systems ein, so muss diese Bewegung so vor sich gehen, dass die Summe der Bewegungsgrössen Null bleibt, es müssen nämlich hinsichtlich der betrachteten Richtung entsprechende Bewegungen der Theile in entgegengesetztem Sinne stattfinden.

Sehen wir ab von den Wirkungen der Schwere, welche als äussere Kraft hinzutritt und die Erscheinungen nach Umständen mehr oder weniger modificirt und sehen wir auch ab von äusseren Bewegungshindernissen (Reibung und Mittelwiderstand), die eben auch als äussere Kräfte ins Spiel treten, so wäre z. B. der Rückstoss der Geschütze, die Bewegung von Raketen u. dgl. auf das vorstehende Princip zurückzuführen.

(Stossdruck und Reaction ausströmender Flüssigkeiten und Gase.) Das Princip des Antriebes gestattet eine elegante Lösung des Problems vom Stossdrucke eines Flüssigkeitsstrahles.*) Wir denken uns einen solchen aus einer Oeffnung *AB* (Fig. 106) mit der Geschwindigkeit v austretend an eine Wand *CD* senkrecht stossend, so dass die seitwärts sich ausbreitenden Flüssigkeitstheilchen ihre der Axe des Strahles parallele Geschwindigkeit v verlieren.

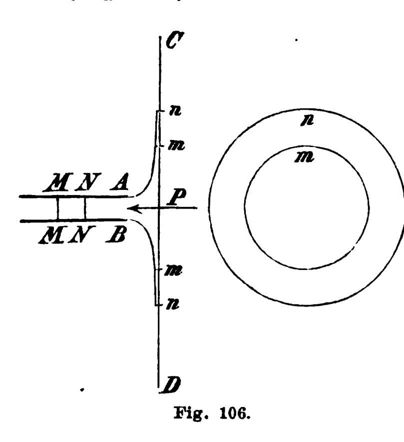


Fig. 106.

Während eine Schichte *MM* innerhalb des Zeitelementes dt nach *NN* sich vorschiebt, werden Theilchen im Umkreise *mm*, die eben ihre ganze axiale Geschwindigkeit verloren haben, nach *nn* vorgerückt sein und anderen Theilchen Platz gemacht haben, die nunmehr auch, den ringförmigen Zwischenraum *mn* gleich dem prismatischen *MN* ausfüllend, ihre ganze Geschwindigkeit abgegeben haben. Betrachten wir die Flüssigkeitsmasse erst in der Lage *MMmm* und dann in der Lage *NNnn* und denken uns beiderseits die gemeinschaftliche Partie *NNmm* fortgenommen, so leuchtet ein, dass die Aenderung der Bewegungsgrösse der ganzen innerhalb dt vorgeschobenen Masse sich auf die Aenderung der Bewegungsgrösse einer Flüssigkeitsmasse vom Volumen *MMNN* (welches gleich dem Volumen *mmnn* ist) reducirt, deren Geschwindigkeit von v in 0 übergeht. Diese Aenderung ist aber nichts anderes als das Product der besagten Flüssigkeitsmasse mit der Austrittsgeschwindigkeit, also $\varrho f v dt \cdot v = \varrho f \cdot v^2 dt$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit (Masse der Volumseinheit) und f den Querschnitt des Strahles bedeutet. vdt ist eben, wie leicht einzusehen, gleich der Länge *MN*.

Diese Gesammtänderung der Bewegungsgrösse muss nach dem im vorhergehenden Paragraphen erläuterten Satze (Formel 186 bis 188) dem Gesammtantriebe der auf dieselbe Rich-

*) Siehe Delaunay, analyt. Mechanik.

tung bezogenen Kräfte gleich sein, welche jene Aenderung der Bewegungsgrösse bewirken. Dieser Gesammtantrieb ist aber nichts Anderes als der Antrieb des erforderlichen Gegendruckes P, mit welchem die gestossene Wand Stand halten muss, wenn sie nicht dem Andrange des Stossdruckes weichen soll. Da die Aenderung der Bewegungsgrösse ein Verlust, also negativer Zuwachs ist, und andererseits die Reaction der den Stoss empfangenden Wand der Bewegungsrichtung des Strahles entgegengesetzt ist, schreiben wir correct

$$-\varrho f \cdot v^2 dt = -P dt \text{ oder } \varrho f \cdot v^2 dt = P dt,$$

somit

$$P = \varrho f v^2$$

oder in Gewichtseinheiten

$$P = \varrho f \cdot \frac{v^2}{g} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 189)$$

für den Reactionsdruck der Wand und somit für den Stossdruck des Strahles. Dieser Stossdruck ist also nach dieser theoretischen Bestimmung gleich dem doppelten hydrostatischen Drucke einer Säule derselben Flüssigkeit, deren Basis dem Querschnitte des Strahles und deren Höhe der Geschwindigkeitshöhe des Ausflusses $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ gleichkommt.

Bei praktischen Anwendungen müssen Erfahrungscoëfficienten eingeführt werden, um Rechnung und Erfolg in Einklang zu bringen.

Der soeben berechnete Stossdruck ist dem Reactionsdrucke gleich, welchen die Flüssigkeit im Ausströmungsgefässe in entgegengesetztem Sinne erfährt und zu dessen Demonstration bekanntlich dem Segner'schen Rade ähnliche Reactionsräder u. drgl. dienen. Es folgt dies schon aus dem im ersten Hauptstücke besprochenen mechanischen Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Aehnliche Formeln gelten für den Stoss und Reactionsdruck von Gasen, insofern auch hier die Proportionalität mit dem Quadrate der Geschwindigkeit stattfinden muss. Der Reactionsdruck ausströmender Gase ist es z. B., der die Bewegung von Heron's Dampfkugel, sowie die Bewegung der Raketen, Feuerräder u. drgl. bedingt, wie schon bei der Theorie

des Antriebes angedeutet worden ist, auf die wir ja eben die Wirkungen des Stoss- und Reactionsdruckes zurückgeführt haben.

Der Stossdruck bewegter Luft, der als Windstärke mittelst der sogenannten Anemometer gemessen wird, ist bestimmt durch die empirische Formel

$$p = 0{,}00776 v^2 \quad \ldots \ldots \quad 190)$$

wenn man unter p den Druck des Windes auf ein Quadratmeter in Kilo. und unter v die Geschwindigkeit des Windes, wie üblich in Kilometern per Stunde ausgedrückt, versteht.

Näheres über Windmessung enthält des Verfassers Artikel „Anemometer" in Kick und Gintl's technischem Wörterbuche.

Viertes Hauptstück.

Einleitung in die mechanische Wärmetheorie.

Die nachstehende Skizze, welche eine übersichtliche Darstellung der principiell wichtigsten Lehrsätze der mechanischen Wärmetheorie geben soll, hat zugleich den Zweck, auf das Studium ausführlicherer Schriften über diesen Gegenstand vorzubereiten. Wir wählen desshalb eine etwas allgemeinere Behandlungsart, als man sie vielleicht in einem Grundriss erwarten mag, weil wir auf diese Art den Leser am besten zu befähigen glauben, bei der Lectüre grösserer Werke, wenn auch sehr verschiedenen Standpunktes, sich rasch zu orientiren. Dies ist aber vor Allem nöthig, um den Stoff mit Unterscheidung des mehr oder weniger Wichtigen zu beherrschen und das Neue ohne Schwierigkeit mit den bereits erworbenen Vorkenntnissen in Verbindung zu bringen und sich anzueignen.

Es ist zuerst von J. R. Mayer in Heilbronn mit Bestimmtheit ausgesprochen und von Joule in Manchester in überzeugender Weise nachgewiesen worden, dass zwischen Wärme und Arbeit ein Zusammenhang stattfindet, vermöge dessen durch Verbrauch von Wärme Arbeit erzeugt und umgekehrt durch Verbrauch von Arbeit Wärme hervorgerufen wird.

Eine nähere Betrachtung der Bedingungen, unter welchen sich die angegebene Beziehung erkennen lässt, zeigt uns, dass die Wärme vor Allem das Bestreben hat, die Körper auszudehnen; feste Körper in flüssige, flüssige in gasförmige zu verwandeln und nach Umständen auch chemische Zerlegungen zu veranlassen; dass sie also im Allgemeinen darauf hinwirkt, den Zusammenhang der Körpertheilchen zu lockern oder gänzlich zu lösen, und wo er bereits völlig aufgehoben ist, die Theilchen möglichst weit von einander zu entfernen. Clausius*) charakterisirt diese Wirkungen der Wärme mit dem Ausdrucke

*) Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie. Siehe auch dessen populären Vortrag über den zweiten Hauptsatz der mech. Wärmetheorie.

Disgregation, indem er der Wärme das Bestreben zuschreibt, die Disgregation der Körper zu vermehren.

Fassen wir den Vorgang der Disgregationsvermehrung näher ins Auge, so überzeugen wir uns, dass dabei im Allgemeinen Arbeit verrichtet werden muss und zwar Arbeit von zweierlei Art: eine innere bei Ueberwindung der molekularen Anziehungskräfte, welche einem Auseinanderrücken der Körpertheilchen entgegenwirken, und eine äussere, insofern sich die Körper in der Regel nur unter gleichzeitiger Ueberwindung eines äusseren auf ihnen lastenden Druckes auszudehnen vermögen, wie z. B. des Luftdruckes.

Andererseits erzeugt die Erwärmung eines Körpers aber auch lebendige Kraft und zwar im Allgemeinen ebenfalls sowohl eine innere als eine äussere; eine innere durch Verstärkung der (nach Massgabe des Aggregationszustandes der Körper) schwingenden oder fortschreitenden u. s. w. Bewegungen der Molecüle, auf welche in der Mechanik der Gase näher beschriebenen Bewegungen wir dort die sogenannte absolute Temperatur zurückgeführt haben (siehe Formel 112—116), und eine äussere, insofern der erwärmte Körper selbst unter gewissen Bedingungen durch Wärmezufuhr eine Geschwindigkeit (z. B. Ausströmungsgeschwindigkeit bei Erwärmung eines Gases oder Dampfes in einem Gefässe) erhalten kann. Bei den folgenden näheren Erörterungen der soeben aufgezählten Wirkungen wollen wir uns zu deren Bezeichnung der sehr zweckmässigen Terminologie von G. Schmidt bedienen, indem wir die verschiedenen Formen von Arbeit oder lebendiger Kraft als innere oder äussere „Verschiebungs“- oder „Bewegungs“- (auch lebendige) Arbeit benennen. Die Wärme bewirkt also innere Verschiebungsarbeit, indem sie die Körpertheilchen weiter von einander entfernt; innere Bewegungsarbeit, indem sie deren schwingende, fortschreitende u. s. w. Bewegungen verstärkt; äussere Verschiebungsarbeit, indem sie bei der Ausdehnung einen auf dem sich ausdehnenden Körper lastenden Druck zurückschiebt; äussere Bewegungsarbeit, indem sie einem in Folge von Erwärmung ausströmenden Gase oder Dampfe eine gewisse (Ausströmungs-)Geschwindigkeit ertheilt.

(**Gegenstand der mechanischen Wärmetheorie; Charakteristik der Zustandsänderungen.**) In Folge der oben erwähnten Beziehung zwischen Wärme und Arbeit, welche sich in einem

constanten Verhältnisse zwischen der verbrauchten Wärme und dadurch erzeugten Arbeit, oder umgekehrt, der verbrauchten Arbeit und dadurch erzeugten Wärme ausprägt, werden wir bei den nachfolgenden Untersuchungen stets in dem Falle sein, diese beiden Grössen nebeneinander zu betrachten, wesshalb es zweckmässig erscheint, dieselben von vornherein auf eine und dieselbe Einheit zurückzuführen. Wir bewerkstelligen dies mit Hilfe des in der Mechanik der Gase bereits erklärten Begriffes des mechanischen Aequivalentes der Wärme (Seite 178), indem wir uns nämlich der an citirter Stelle nachgewiesenen Thatsache erinnern, dass eine Calorie einer Arbeit von $424 = E$ Kilogrammmetern äquivalent ist, somit der Arbeit eines Kilogrammmeters $\frac{1}{424} = \frac{1}{E} = A$ Calorien; hieraus folgt, dass wir einen gegebenen Arbeitswerth durch Multiplication mit A in Calorien umrechnen und wir wollen nach dem Vorschlage von Clausius einen in solcher Weise auf Calorien umgerechneten Arbeitswerth Werk nennen. Wir werden also unmittelbar gegebene Wärmemengen und aus gegebenen Arbeitswerthen umgerechnete Wärmemengen, d. h. wir werden Zahlenwerthe von Wärme und Werk nebeneinander zu betrachten haben.

Die Wärme bewirkt an den Körpern Zustandsänderungen, welche wir im Allgemeinen bereits namhaft gemacht haben, und die mechanische Wärmetheorie ist nun eben die Wissenschaft von den Gesetzmässigkeiten, welche sich für diese Zustandsänderungen aus der von uns bereits dargelegten Hypothese über das Wesen der Wärme theoretisch folgern lassen.

Die besagten Zustandsänderungen werden sich durch gewisse Aenderungen messbarer Grössen an den Körpern zu erkennen geben und wir wollen sogleich bemerken, dass wir in dieser Richtung Temperatur, Druck und Volumen ins Auge fassen wollen.

Hinsichtlich des Druckes wollen wir dabei für alle Fälle, in welchen nicht ausdrücklich etwas Anderes angenommen wird, ein für allemal voraussetzen, dass die Körper, deren Zustandsänderungen wir betrachten, einem an allen Stellen ihrer Oberfläche gleich starken Normaldrucke auf die Flächeneinheit ausgesetzt seien, und dass der Gegendruck, welchen sie dabei ausüben, dem besagten normalen Oberflächendrucke stets sehr nahe gleichkomme, d. h. dass dieser Gegendruck im Falle einer

Ausdehnung nur um ein unendlich Kleines grösser, und im Falle einer Zusammendrückung des Körpers nur um ein unendlich Kleines kleiner sei als der äussere Normaldruck. Die Volumsveränderungen der Körper werden dann sogenannten umkehrbaren Bewegungen entsprechen, d. h. solchen, welche sich im entgegengesetzten Sinne genau unter denselben Verhältnissen ausführen lassen, während dies bei einer beträchtlichen Ungleichheit jener beiden Druckkräfte nicht der Fall ist. (Dehnt sich z. B. ein Gas bei stets nahezu gleichem Drucke und Gegendrucke aus, so wird bei der Ausdehnung eine Arbeit verrichtet, durch deren Aufwendung im entgegengesetzten Sinne wir die Ausdehnung wieder rückgängig machen können. Lassen wir jedoch ein Gas ohne Ueberwindung eines äusseren Druckes sich ausdehnen, z. B. in den leeren Raum ausströmen, so wird dabei keine Arbeit verrichtet. Wir können aber nicht umgekehrt die Ausdehnung ebenfalls ohne Arbeitsaufwand rückgängig machen, und überhaupt, wenn Druck und Gegendruck merklich ungleich sind, so kann die Ausdehnung nicht rückgängig gemacht werden durch Aufwendung der bei der Ausdehnung verrichteten Arbeit.) Ebenso wollen wir, wo immer eine Wärmezufuhr oder Ableitung stattfindet, stets voraussetzen, dass der Wärmeleiter, von welchem der Körper, dessen Zustandsänderungen wir untersuchen, Wärme empfängt oder an welchen er solche abgibt, sehr nahe dieselbe Temperatur habe (im ersten Falle eine um ein unendlich Kleines grössere, im zweiten eine um ein unendlich Kleines kleinere) als der betrachtete Körper selbst, damit eben auch diese Wärmeübergänge als bei den vorzunehmenden Zustandsänderungen umkehrbare sich darstellen, was aus ähnlichen Erwägungen, wie die bereits angeführten, erhellet. Wir können uns diese so bewerkstelligt denken, dass wir den Wärme abgebenden oder aufnehmenden Leiter als so gross annehmen, dass seine (mit der Temperatur des untersuchten Körpers in jedem einzelnen Falle nahezu gleiche) Temperatur durch Abgabe oder Aufnahme der in Betracht kommenden Wärmemenge nicht merklich geändert wird. Wir werden auf eine nähere Erörterung solcher Vorgänge später zurückkommen, für jetzt aber zunächst eine Folgerung beachten, welche sich aus der soeben gemachten Annahme über die Druckverhältnisse ergibt.

Wenn in der That ein Körper (Fig. 106), der einem

gleichmässigen normalen Oberflächendrucke von der Grösse p auf die Flächeneinheit ausgesetzt ist, unter Ueberwindung desselben und zwar mit Ausübung eines nahezu gleichen (nämlich nur um ein unendlich Kleines grösseren) Gegendruckes sich ausdehnt, z. B. so, dass sein Volumen v in $v + dv$ übergeht, so wird jedem in normaler Richtung um die Strecke h vorgeschobenen Oberflächenelemente ω ein Druck $p\omega$ und somit ein bei der Ausdehnung verrichtetes Arbeitselement vom Betrage $p\omega h$ entsprechen. Es wird sonach das dem Differentiale des Volumens, welches offenbar $dv = \Sigma\omega h$ ist, entsprechende Arbeitsdifferentiale dL durch $\Sigma p\omega h = p\Sigma\omega h = p dv$ ausgedrückt werden. Wir werden von dieser Beziehung sogleich eine Anwendung machen.

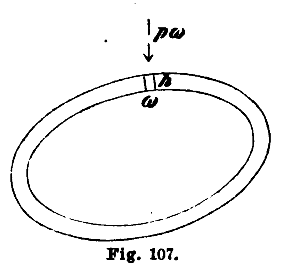


Fig. 107.

(**Grundgleichung.**) Wir kehren vorerst zur Betrachtung der Zustandsänderungen zurück, welche durch Wärmezufuhr an einem Körper hervorgebracht werden können und setzen dabei zunächst voraus, dass dem untersuchten Körper eine unendlich kleine Wärmemenge dQ zugeführt werde. Diese wird nun im Allgemeinen eine entsprechende innere Verschiebungsarbeit dJ, innere Bewegungsarbeit dW, äussere Verschiebungsarbeit dL und äussere Bewegungsarheit dB bewirken, welche einzelnen Arbeitselemente wir sofort durch Multiplication mit A in Werkelemente umrechnen wollen, wodurch wir zur Grundgleichung

$$dQ = A(dJ + dW + dL + dB) \quad . \quad . \quad . \quad 191)^*)$$

hingeführt werden.

Die Probleme, mit welchen wir uns in diesen Grundzügen beschäftigen wollen, werden von der Art sein, dass eine äussere Bewegungsarbeit nicht stattfindet, wesshalb wir $dB = 0$ setzen. Andererseits machen wir von der kurz zuvor nachgewiesenen Relation $dL = p dv$ Gebrauch und führen endlich noch eine Grösse U ein, Energie genannt, welche wir in der Mechanik (Seite 108) bereits kennen gelernt haben. Sie ist, wie wir an citirter Stelle sagten, die Summe der sogenannten poten-

*) Vergl. Zeuner, mech. Wärmetheorie.

tiellen Energie oder Energie der Lage und der actuellen Energie, welche lebendige Kraft ist. Ihre Aenderung dU wird sonach den Elementen der inneren Verschiebungs- und Bewegungsarbeit entsprechen, wodurch wir erhalten

$$dU = dJ + dW \quad \ldots\ldots\ldots \quad 192)$$

eine Grösse, welche wir auch als Aenderung des inneren Werk- und Wärmeinhaltes bezeichnen können. Die Grundgleichung gestaltet sich demgemäss wie folgt:

$$dQ = A(dU + pdv) \quad \ldots\ldots \quad 193)$$

(**Weg der Zustandsänderungen.**) An den beiden Grössen AdU und $Apdv$ macht sich bei näherer Untersuchung ein wesentlicher Unterschied von ganz hervorragender Bedeutung bemerkbar, mit dessen Erörterung wir uns sofort beschäftigen wollen. Betrachten wir zunächst die drei Grössen: Temperatur, Druck und Volumen, die uns künftighin zur Kennzeichnung der Zustandsänderungen der Körper dienen sollen, so werden wir gewahr, dass je zwei derselben den Zustand des Körpers und somit auch die dritte der vorgenannten Grössen bestimmen, so dass wir jede als Function der beiden anderen ansehen und schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} t &= \varphi(p, v) \\ p &= \psi(t, v) \\ v &= \chi(t, p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 194)$$

Mit dem Zustande des Körpers ist aber auch dessen Energie U völlig bestimmt, wesshalb diese als eine durch je zwei der Grössen t und v, t und p oder p und v, wenn dieselben als unabhängig Veränderliche angesehen werden, vollkommen bestimmte Grösse sich darstellt. Daraus ergibt sich noch eine weitere wichtige Folgerung, nämlich, dass es bezüglich des Endwerthes, welcher die Energie U bei einer Zustandsänderung des Körpers erreicht, ganz gleichgiltig ist, durch welche Zwischenzustände wir den Körper aus seinem Anfangszustande in den besagten Endzustand übergeführt haben. Man pflegt dies auch so auszusprechen, dass man sagt: die Energie sei vom Wege unabhängig, auf welchem ein Körper aus einem bestimmten Anfangszustande in einen bestimmten Endzustand übergeht. Der Sinn dieser Ausdrucksweise knüpft sich an

eine Auffassung, die wir hier sofort erläutern wollen. Wir nehmen an, p und v seien die unabhängigen Veränderlichen und wir stellen die Werthe des Volumens v als Abscissen, jene des Druckes p als Ordinaten dar (Fig. 108). Die durch die Coordinaten v_1, p_1 und v_2, p_2 festgelegten Punkte repräsentiren dann zwei Zustände des untersuchten Körpers, die wir kurz als Zustand v_1, p_1 und Zustand v_2, p_2 oder auch geradezu nur als Zustand *I* und *II* benennen wollen. In beiden Fällen hat nun die Energie bestimmte Werthe U_1 und U_2, wobei es ganz gleichgiltig ist, welcher Zusammenhang, $f(p, v) = 0$, etwa

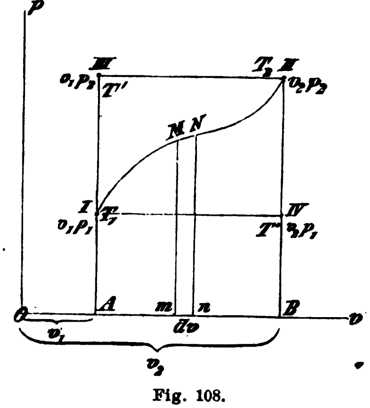


Fig. 108.

zwischen den beiden Grössen p und v stattfindet, d. h. welcher Curve *IMNII* etwa die beiden Punkte v_1, p_1 und v_2, p_2 angehören mögen, welche Curve also gewissermassen den Weg ersichtlich macht, auf welchem die Zustandsänderung sich vollzogen hat, d. h., welche Zwischenzustände der Körper annehmen musste, bevor er aus dem Anfangszustande in den Endzustand gekommen ist. Wir können also sagen: U ist eine Function der unabhängig Veränderlichen p und v; also

$$U = f(p, v)$$

oder, wie in derselben Weise gefolgert werden kann

$$U = F(t, v) \qquad \ldots \; 195)$$

$$U = f(t, p)$$

Eine nothwendige Folgerung dieses Ergebnisses ist, dass, wenn man von U die Differentialquotienten nach t und v oder in umgekehrter Ordnung; nach t und p oder in umgekehrter Ordnung; oder endlich nach p und v oder in umgekehrter Ordnung bildet, dieselben beziehungsweise einander gleich sein müssen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial v} - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial p} - \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial v} - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 196)$$

wie eben bei jeder Function $f(x, y)$ von zwei unabhängig Veränderlichen bekanntlich die Gleichung $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$ erfüllt ist.

Anders verhält sich die Sache hinsichtlich der bei der Zustandsänderung des Körpers verrichteten äusseren Arbeit; dass dieselbe vom Wege der Zustandsänderung, d. i. von den Zwischenzuständen, welche der Körper durchmacht, abhängig ist, wollen wir sogleich in einem speciellen Falle nachweisen.

Wir denken uns die Gewichtseinheit eines Gases den in Figur 108 dargestellten Zustandsänderungen und zwar das eine Mal in der Reihenfolge v_1p_1, v_1p_2, v_2p_2 (*I III, II*) und ein anderes Mal in der Reihenfolge v_1p_1, v_2p_1, v_2p_2 (*I IV II*) unterworfen. Dabei werden gewisse Temperaturänderungen und zwar im ersten Falle $T_1 T' T_2$, im zweiten $T_1 T'' T_2$ stattfinden, welche gewisse Wärmezuführungen in Anspruch nehmen werden. Diese sind, wenn wir die Wärmecapacitäten bei constantem Drucke und constantem Volumen beziehungsweise mit c_p und c_v bezeichnen, auf dem ersten Wege (*I III II*) offenbar $c_v(T' - T_1) + c_p(T_2 - T') = Q'$; auf dem zweiten Wege (*I IV II*) $= c_p(T'' - T_1) + c_v(T_2 - T'') = Q''$. Man erhält sonach für die Differenz dieser beiden Wärmemengen:

$$Q' - Q'' = (c_p - c_v)[(T_1 + T_2) - (T' + T'')]$$

woraus durch Einsetzen der Werthe aus der Mariotte-Gay-Lussac'schen Formel (Formel 124), nämlich $T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$, $T_2 = \frac{p_2 v_2}{R}$, $T' = \frac{p_2 v_1}{R}$ und $T'' = \frac{p_1 v_2}{R}$ hervorgeht:

$$Q' - Q'' = \frac{(c_p - c_v)}{R}[(p_2 - p_1) \cdot (v_2 - v_1)]$$

eine Gleichung, welche nach beiderseitiger Multiplication mit E uns sofort den Unterschied der Arbeitswerthe auf den beiden Wegen *I III II* und *I IV II* vor Augen legt. Dieser Unterschied ist $E(Q' - Q'') = E\,\frac{(c_p - c_v)}{R}[(p_2 - p_1)(v_2 - v_1)]$, welcher

Ausdruck noch mit Rücksicht auf die bekannte Bedeutung der Constanten R des M.-G. Gesetzes (Formel 144) vermöge welcher $\frac{E(c_p - c_v)}{R} = \frac{c_p - c_v}{AR} = 1$ ist, die einfachere Gestalt annimmt:

$$E(Q' - Q'') = [(p_2 - p_1)(v_2 - v_1)] \quad . \; . \; . \; . \quad 197)$$

Wir haben damit bewiesen, dass die bei den Zustandsänderungen eines Körpers verrichtete Arbeit sowie die dabei zugeführte Wärme keineswegs unabhängig ist vom Wege, d. i. von der Reihenfolge der Zustandsänderungen. Es wird dies auch durch unsere graphische Construction augenfällig gemacht; am besten, wenn wir uns nunmehr den allgemeineren Fall denken, dass die Zustandsänderung nicht gerade auf dem Wege *I III II* oder *I IV II*, sondern auf dem einer Curve *IMNII* vor sich gehe. In der That ist dann ein Element der dabei verrichteten Arbeit vorgestellt durch das Flächenelement $MNmn = pdv$ und die ganze beim Uebergange aus dem Zustande $v_1 p_1$ in den Zustand $v_2 p_2$ verrichtete Arbeit durch die Fläche $AIMNIIB = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$, ein Integral, dessen Auswerthung offenbar die Kenntniss von p als $f(v)$ voraussetzt, d. h. wir müssen das Gesetz kennen, nach welchem p und v bei der Wärmezufuhr sich ändern, wenn wir die während einer Zustandsänderung zugeführte Wärme oder die dabei verrichtete Arbeit berechnen wollen. Zu ganz analogen Schlussfolgerungen werden wir gelangen, wenn wir statt p und v z. B. t und v oder t und p als Veränderliche gewählt hätten. Um diese Schlussfolgerungen nun in der That in den drei angedeuteten Richtungen weiterhin verfolgen zu können, wollen wir das Element der zugeführten Wärme dQ der Reihe nach durch Differentialgleichungen darstellen, welche t und v oder t und p oder endlich p und v als unabhängig Veränderliche voraussetzen. Diese Gleichungen, welche wir, da wir uns sehr oft auf sie berufen werden, kurzweg Wärmegleichungen nennen wollen, schreiben wir in folgender Weise

$$dQ = c\,dt + l\,dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 198)$$

$$dQ = C\,dt + h\,dp \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 199)$$

$$dQ = \xi\,dp + \eta\,dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 200)$$

(**Werkdifferenz; erste Hauptgleichung.**) Aus dem oben

Gesagten folgt nun in Bezug auf diese Gleichungen, die wir auch unter die allgemeine Form

$$dQ = Mdx + Ndy \quad \ldots\ldots \quad 201)$$

bringen können (wobei uns vorbehalten bleibt, unter x und y nach Belieben entweder t und v oder t und p oder p und v zu verstehen), dass, so lange x und y als unabhängig Veränderliche gelten, die einem Uebergange vom Zustande $x_1 y_1$ in den Zustand $x_2 y_2$ entsprechende Wärmezufuhr nicht ermittelt, d. h. mit anderen Worten, die Gleichung 201, somit auch jede der Gleichungen 198, 199 und 200 nicht integrirt werden kann. Wenn nun aber die Gleichung $dQ = Mdx + Ndy$ nicht integrabel ist, so kann nach bekannten Lehrsätzen der Integralrechnung die Differenz $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ nicht $= 0$ sein, sondern muss einen von 0 verschiedenen Werth besitzen, welchen wir nach Clausius mit dem Ausdrucke Werkdifferenz bezeichnen wollen; wir drücken diese Grösse durch das Symbol $\Delta_{y,x}$ aus und schreiben:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \Delta_{y,x} \quad \ldots\ldots \quad 202)$$

wobei wir mit Rücksicht auf die Bedeutung von $M = \frac{\partial Q}{\partial x}$ und $N = \frac{\partial Q}{\partial y}$ auch schreiben können:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = \Delta_{y,x} \quad \ldots\ldots \quad 203)$$

Das Resultat, welches uns nun vorliegt, beruht wesentlich auf dem Satze, dass Wärme und Arbeit äquivalent sind, ein Satz, welchen man den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zu nennen pflegt; denn dieses Ergebniss sagt mit anderen Worten, dass das Integral von $dQ = A(dU + pdv)$ insolange nicht ermittelt werden kann, als der Theil $Apdv$ des Wärmeelementes dQ nicht integrabel ist und pdv ist ja eben das diesem Theile äquivalente Arbeitselement. Wir können also sagen, dass die Gleichung für die Werkdifferenz (203) indirect auch den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zum Ausdrucke bringt, wesshalb wir diese Gleichung denn auch als erste Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie bezeichnen wollen. Man ertheilt diese Benennung gewöhnlich einer durch Specialisirung der Gleichung 203

durch Einführung der Veränderlichen p und v sich ergebenden Relation, von der später die Rede sein wird. Wir wollen jedoch die Sache allgemeiner auffassen und nennen „erste Hauptgleichung" jede Gleichung, welche ausdrückt, dass die Wärmegleichung $dQ = Mdx + Ndy$ nicht integrabel ist, solange x und y als unabhängig Veränderliche angesehen werden. Setzen wir nun der Reihe nach t und v, t und p; p und v statt x und y, wodurch wir zu den Gleichungen 198, 199 und 200 zurückgeführt werden, so kommen wir zu drei Gleichungen für die Werkdifferenz, deren jede als eine Form der ersten Hauptgleichung anzusehen ist. Um diese Discussion übersichtlicher zu gestalten, wollen wir vorerst noch den in Formel 203 gegebenen allgemeinen Ausdruck für die Werkdifferenz in eine für die Rechnung bequemere Form bringen. Betrachten wir im Allgemeinen wieder x und y als die unabhängig Veränderlichen und gehen wir auf die Grundgleichung $dQ = A(dU + p\,dv)$ zurück, so ist sofort einleuchtend, dass für dU und dv folgende Ausdrücke gelten:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 204)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205)$$

Ferner

$$dQ = A\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + p\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\right] \quad . \quad 206)$$

wobei offenbar

$$\left.\begin{aligned} A\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= M \\ \text{und} \qquad & \\ A\left(\frac{\partial U}{\partial y} + p\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= N \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 207)$$

Mit Rücksicht auf Werthe von M und N ergibt sich

$$\Delta_{y,x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = A\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + p\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right)\right]$$

also wegen $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ (siehe Formel 195, 196) und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \text{ (siehe Formel 194)}$$

$$\triangle_{y,x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = A\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad . \quad . \quad 208)$$

Setzen wir zunächst $x = t$, $y = v$, so erhalten wir (zugleich mit Rücksicht auf Formel 198)

$$\triangle_{v,t} = \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial v} = A\left(\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

d. i. wegen $\frac{\partial v}{\partial v} = 1$ und $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (da ja t und v selbst die von einander unabhängig Veränderlichen sein sollen)

$$\triangle_{v,t} = \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial v} = A\frac{\partial p}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 209)$$

In gleicher Weise ergibt sich für $x = t$ und $y = p$ (mit Rücksicht auf Gleichung 199)

$$\triangle_{p,t} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} = A\left(\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

somit aus analogen Gründen wie vorhin

$$\triangle_{p,t} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} = -A\frac{\partial v}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 210)$$

und endlich für $x = p$, und $y = v$ (mit Rücksicht auf Gleichung 200) $\triangle_{v,p} = \frac{\partial \eta}{\partial p} - \frac{\partial \xi}{\partial v} = A\left(\frac{\partial p}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p}\right)$; somit

$$\triangle_{v,p} = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 211)$$

Zu denselben Ausdrücken für die Werkdifferenz können wir auch gelangen, indem wir auf die Bedeutung der Differentialquotienten c und l, dann C und h und endlich ξ und η eingehen, was wir uns für spätere Zwecke jedenfalls zur Aufgabe machen müssen.

(**Bedeutung der Differentialquotienten c, l, C, h, ξ und η.**) Vergleichen wir die Ausdrücke $dQ = A(dU + p\,dv)$ und $dQ = c\,dt + l\,dv$, so lassen sich beide Gleichungen identisch machen, indem man U eben auch als $f(t, v)$ einführt und schreibt: $dU = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial U}{\partial v} dv$, wodurch man erhält

$$dQ = A\left[\frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right) dv\right] \quad . \quad . \quad . \quad 212)$$

Durch Nebeneinanderstellung dieser Gleichung und der anderen $dQ = c\,dt + l\,dv$, erhellet sofort

$$c = A\frac{\partial U}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 213)$$

und

$$l = A\left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right) \quad \ldots \ldots \quad 214)$$

woraus zugleich

$$\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial v} = A\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial v} + \frac{\partial p}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial t}\right] = A\frac{\partial p}{\partial t}$$

hervorgeht wie oben (Formel 209.)

Wählt man t und p als unabhängig Veränderliche und schreibt demgemäss $dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial p}dp$ und andererseits $dv = \frac{\partial v}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial v}{\partial p}dp$, so gestaltet sich durch Einführung dieser Ausdrücke die Grundgleichung für dQ folgendermassen:

$$dQ = A\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial U}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp\right] \quad . \; . \quad 215)$$

wesshalb bei Vergleichung mit $dQ = C\,dt + h\,dp$ folgende Beziehungen ersichtlich werden:

$$C = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad \ldots \ldots \quad 216)$$

und

$$h = A\left(\frac{\partial U}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right) \quad \ldots \ldots \quad 217)$$

woraus wir abermals die Werkdifferenz berechnend, erhalten:

$$\triangle_{p,t} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} =$$

$$= A\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial p} + \frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial p} + p\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial p}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial t} + \frac{\partial p}{\partial p}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t}\right)\right] =$$

$$= - A\frac{\partial v}{\partial t}$$

Sind endlich p und v die unabhängig Veränderlichen, also $dU = \frac{\partial U}{\partial p}dp + \frac{\partial U}{\partial v}dv$ und somit

$$dQ = A\left[\frac{\partial U}{\partial p}dp + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)dv\right] \quad . \; . \; . \; . \quad 218)$$

so führt die Vergleichung mit $dQ = \xi dp + \eta dv$ zu den Werthen:

$$\xi = A \frac{\partial U}{\partial p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 219)$$

und

$$\eta = A \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 220)$$

für welche man die Werkdifferenz findet $\triangle_{v,p} = \frac{\partial \eta}{\partial p} - \frac{\partial \xi}{\partial v}$ $= A \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial v} + \frac{\partial p}{\partial p}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial p}\right] = A$, wie oben.

Die soeben gewonnenen Ausdrücke für die Werkdifferenz, zuerst von Clausius aufgestellt, werden auch die Clausius'schen Gleichungen genannt. Es bedarf wohl kaum einer näheren Erläuterung, welche physikalische Bedeutung den in den Wärmegleichungen 198, 199, 200 vorkommenden Coëfficienten c, l, C u. s. w. innewohnt. Man beachte, dass, wenn (in 198) $dv = 0$, d. i. wenn v constant ist, $dQ = c dt$ oder, nach Clausius'scher Bezeichnungsart $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\bar{v}} = c$; wir erkennen in dieser Grösse sofort die Wärmecapacität bei constantem Volumen, die wir sonst immer mit c_v bezeichnet haben. Wir erhielten für diese Wärmecapacität bereits den Ausdruck

$$c = A \frac{\partial U}{\partial t} \text{ (Formel 213).}$$

Ebenso finden wir (aus 169) $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\bar{p}} = C$, welche Zahl demnach die Wärmecapacität bei constantem Drucke ist, die wir sonst mit c_p bezeichneten, eine Grösse, für welche wir oben (Formel 216) den Ausdruck $C = A \left(\frac{\partial U}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t}\right)$ ermittelt haben. Die Vergleichung beider Ausdrücke lehrt die Beziehung

$$C - c = Ap \frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 221)$$

Wir wollen nicht unterlassen, dieses Ergebniss sogleich für Gase zu specialisiren, indem wir aus der Zustandsgleichung $pv = RT = R(a + t)$ (wobei wir a für 273 setzen) den Werth $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{p}$ entnehmen, nach dessen Einsetzung wir die Clausius'sche Formel

$$C - c = AR \quad \ldots\ldots\ldots \quad 222)$$

erhalten.

Diese Formel führt uns noch zu weiteren wichtigen Folgerungen. Fürs erste lehrt sie die Bedeutung der Constanten R des M.-G. Gesetzes, nämlich $R = \frac{1}{A}(C - c) = E(C - c)$, ein Ergebniss, auf welches wir schon in der Mechanik (Formel 141) gekommen sind und welches wir dort zur numerischen Bestimmung des mechanischen Aequivalentes $E = \frac{R}{C - c}$ benutzt haben, indem wir die speciellen Zahlenwerthe der Grössen R, C und c für atmosphärische Luft einsetzten.*)

Ferner ergibt sich aus der Clausius'schen Formel mit Rücksicht auf $R = \frac{p_0 v_0}{273} = \alpha \cdot p_0 v_0$ der Satz, dass die auf die Volumseinheit (bei der Temperatur $0^0 C$ und beim Drucke p_o) reducirte Differenz der Wärmecapacitäten eine für alle Gase constante Grösse ist, nämlich

$$\frac{C - c}{v_0} = A \alpha p_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 223)$$

Erwägen wir noch, dass, wie Regnault nachgewiesen hat, C bei allen Temperaturen constant ist für jedes Gas und dass andererseits $\frac{C}{v_0}$ constant ist für alle Gase, so folgt aus 222 und 223 auch, dass c constant ist bei allen Temperaturen für jedes Gas und $\frac{c}{v_0}$ constant für alle Gase, eine Schlussfolgerung, der wir auch schon in der Mechanik der Gase begegnet sind (Seite 179).

Endlich sei noch bemerkt, dass man die Grösse $l = \left(\frac{dQ}{dv}\right)_t$ die latente Wärme der Ausdehnung nennt.

---

*) $E = \frac{29,27}{0,237 - 0,168}$, welches nicht viel von dem nach Joule als wahrscheinlichster Mittelwerth angenommenen Betrage 423,55, den wir für E beibehalten wollen, abweicht. — Die weiteren Relationen für R, nämlich die von G. Schmidt entdeckte $R = \frac{2E}{m}$, wobei m das Molecülgewicht bedeutet, und $R = p \,.\, \alpha v$, nämlich gleich der Arbeit, welche die Gewichtseinheit eines Gases leistet, indem sie sich bei der Erwärmung um $1^0 C$ unter constantem Drucke ausdehnt, sind ebenfalls schon in der Mechanik (Seite 180, Formel 146 und 147) abgehandelt worden.

(**Zweiter Hauptsatz; Verwandlungen.**) Dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, nämlich dem Satze der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, steht ein zweiter nicht minder wichtiger Hauptsatz gegenüber, der Satz von der Aequivalenz der Verwandlungen genannt, von welchem wir nun sprechen wollen.

Zuerst sollen die Vorgänge erläutert werden, welche wir Verwandlungen nennen. Wir erwähnten schon bei der ersten Besprechung der Beziehungen zwischen Wärme und Arbeit einer Wirkung der Wärme, welche wir unter dem Namen Disgregationsvermehrung definirt haben. Die Wärme muss, wie wir sahen, bei einer Disgregationsvermehrung innere und äussere Arbeit verrichten. Es findet also dabei eine Umsetzung von Wärme in Werk statt, während beim umgekehrten Vorgange Werk in Wärme übergeht. Wir nennen nun diese beiden einander bedingenden Vorgänge (Disgregationsvermehrung und Umsetzung von Wärme in Werk oder umgekehrt) Verwandlungen, wobei wir eine Disgregationsvermehrung als eine positive, und eine Umsetzung von Wärme in Werk als eine negative Verwandlung (und entsprechend umgekehrt) ansehen wollen. Wir können dann sagen, dass eine positive Verwandlung der einen Art stets eine negative der anderen Art bedingt, wenn wir es, wie ein für allemal vorausgesetzt, mit umkehrbaren Zustandsänderungen zu thun haben. Denkt man sich nun eine derartige Verwandlung ihrer Grösse nach betrachtet, so heisst der auf ein gewisses Mass bezogene Betrag derselben ihr Aequivalenzwerth. Wir können uns jenes Mass immerhin so gewählt denken, dass einander bedingende, also dem Zeichen nach, wie wir bereits gesehen haben, entgegengesetzte Verwandlungen durch gleich grosse Zahlen ausgedrückt werden, so dass die Summe ihrer Aequivalenzwerthe Null ist. In diesem Sinne sagen wir von zwei einander bedingenden gleich grossen Aequivalenzwerthen entsprechenden oder kurzweg äquivalenten Verwandlungen von entgegengesetztem Zeichen, dass sie einander compensiren. — Ausser den soeben betrachteten Verwandlungsarten gibt es noch eine dritte, die wir zu besprechen haben. Wir wollen sie an einem Beispiele erläutern. Die Gewichtseinheit eines Gases von der Temperatur T_1 sei in Berührung mit einem Wärmereservoir K_1 von gleicher Temperatur und dehne sich unter constantem Drucke aus, in

der Art, dass dabei auch die Temperatur durch Wärmeaufnahme aus dem Körper K_1 constant erhalten wird. Es finden dabei zwei Vorgänge statt; einerseits die Aufnahme einer gewissen Wärmemenge Q_1 aus dem Körper K_1 und andererseits eine Arbeitsverrichtung L_1 bei der Ausdehnung unter constantem Drucke. Wir denken uns sodann den Körper K_1 entfernt und das Gas ohne Zu- oder Ableitung von Wärme (also „adiabatisch“, siehe Mechanik der Gase, Seite 175) zusammengedrückt, bis es in Folge dessen eine gewisse höhere Temperatur T_2 (zugleich natürlich auch einen höheren Druck) angenommen hat. In diesem durch Compression erwärmten Zustande bringen wir das Gas in Berührung mit einem anderen Körper K_2 von der gleichen Temperatur T_2 und drücken das Gas weiter in der Art zusammen, dass dabei Druck und Temperatur constant bleiben, was natürlich nur unter der Voraussetzung möglich ist, dass das Gas, weil es ja sonst eine höhere Temperatur annehmen müsste, während seiner Verdichtung eine gewisse Wärmemenge Q_2 an den Körper K_2 abgibt. Andererseits wird bei diesem Vorgange zugleich eine gewisse Arbeit L_2 zur Compression verbraucht. Wir denken uns, diese Zusammendrückung sei gerade soweit fortgesetzt worden, dass bei einer hierauf eintretenden adiabatischen Ausdehnung, bei welcher das Gas seine frühere Temperatur T_1 wieder erlangt, es auch in Bezug auf Druck und Volumen wieder seinen ursprünglichen Zustand angenommen habe.*) Es werden sich dann die bei der adiabatischen Ausdehnung und Zusammendrückung beziehungsweise geleistete (l_2) und verbrauchte (l_1) Arbeit compensiren,**) während von den beiden anderen Arbeitswerthen die bei der höheren Temperatur und also auch höherem Drucke zur Compression verbrauchte (L_2) grösser sein wird als die bei der niedereren Temperatur durch die Ausdehnung des Gases geleistete (L_1); es ist also in der Gesammtheit ein Ueberschuss von Arbeit ($(L_2 - L_1) = L$) verbraucht worden, während andererseits offenbar Wärme vom Körper K_1 auf den Körper K_2 übertragen wurde, indem ja das Gas, in seinen ursprünglichen

*) Man nennt eine solche in sich zurückkehrende Reihenfolge von Zustandsänderungen einen Kreisprocess.

**) Nach Formel 136 der Mechanik ist

$$l_2 = \frac{R}{k-1}(T_2 - T_1) \text{ und } l_1 = \frac{R}{k-1}(T_1 - T_2) = -\frac{R}{k-1}(T_2 - T_1).$$

Zustand zurückgekehrt, die vom Körper K_1 empfangene Wärme Q_1 nicht mehr besitzt, sondern vielmehr an den Körper K_2 abgegeben hat, nebst der durch Aufwendung des Arbeitsüberschusses L erzeugten Wärmemenge AL.

Es geht aus dieser Erwägung ($Q_2 = Q_1 + AL$) hervor, dass $Q_2 - Q_1$ die aus Arbeit entstandene Wärme ist, während Q_1 die vom kälteren Körper auf den wärmeren übergeführte Wärmemenge vorstellt. Wir haben also auch hier zwei Verwandlungen nebeneinander: eine Umsetzung von Werk (AL) in Wärme ($Q_2 - Q_1$) und einen Uebergang einer anderen Wärmemenge Q_1 von einem kälteren auf einen wärmeren Körper.

Bei Ausführung des umgekehrten Vorganges würden wir bei gleichzeitiger Ueberführung einer Wärmemenge Q_1 vom wärmeren auf den kälteren Körper eine Umsetzung von Wärme ($Q_2 - Q_1$) in Werk (AL) erzielt haben.

Die dritte Art der Verwandlungen, die wir nunmehr kennen gelernt haben, ist demnach die Ueberführung von Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Körper oder umgekehrt, von welchen wir die erstere eine positive, die letztere eine negative Verwandlung nennen. Man drückt sich oft auch in der Art aus, dass man sagt, es wird Wärme von höherer Temperatur in Wärme von tieferer Temperatur verwandelt oder umgekehrt.

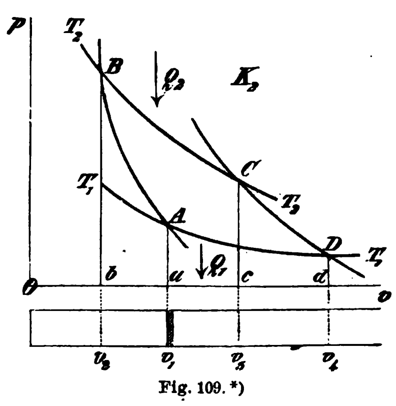


Fig. 109.*)

Wir wollen jetzt diesen Vorgang noch in einem graphischen Bilde verfolgen und dabei, um zugleich die Anschauungen geläufiger zu machen, beispielsweise die zuletzt erwähnte umgekehrte Reihenfolge der Zustandsänderungen zur Sprache bringen.

Die bei constanten Temperaturen T_1 und T_2 vollzogenen Druck- und Volumsänderungen werden entsprechend der Gleichung des M.-G. Gesetzes: $pv = RT$ durch hyperbolische oder sagen wir isothermische Curven AD und BC dargestellt werden, dagegen die bei adiabatischen Compressionen oder Expansionen, entspre-

*) Röntgen, mechanische Wärmetheorie (Seite 100).

chend dem **Poisson**'schen Gesetze: $pv^k = \text{Const.}$, durch die nach **Rankine** so genannten adiabatischen Curven AB und CD. Diesen adiabatischen Zustandsänderungen entsprechen nach Formel 136, da sie zwischen denselben Temperaturgrenzen T_1 und T_2 stattfinden, gleiche Arbeiten von entgegengesetztem Zeichen. Beide Arbeiten kommen den betreffenden Aenderungen der Energie des Gases innerhalb der Grenzwerthe U_1 und U_2 gleich, welche Aenderung nach Formel 213 $\left(c = A\,\frac{dU}{dt}\right)$ bestimmt werden kann.*) Man erhält nämlich durch Integration der Gleichung $dU = \frac{c}{A}\,dt$ die Compressionsarbeit $U_2 - U_1$ $= \frac{1}{A}\,c\,(T_2 - T_1) = Ec\,(T_2 - T_1)$ und die Expansionsarbeit $-(U_2 - U_1) = -Ec(T_2 - T_1)$, welche Arbeiten in der Zeichnung beziehungsweise durch die Flächen $ABab$ und $CDcd$ ausgedrückt erscheinen, während die Flächen $ADad$ und $BCbc$ die bei den isothermischen Zustandsänderungen stattfindenden Arbeiten vorstellen, Arbeiten, welche, wie leicht einzusehen, den absoluten Temperaturen, bei welchen sie stattfinden, proportional sind; da nämlich den bereits als gleich erwiesenen adiabatischen Arbeiten $BAba$ nnd $CDcd$, wie die Anwendung des **Poisson**'schen Gesetzes (Formel 132) $Tv^{k-1} = \text{Const.}$, zeigt, vermöge $T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1}$ und $T_1 v_4^{k-1} = T_2 v_3^{k-1}$ dasselbe Expansionsverhältniss $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ entspricht, so gilt die analoge Beziehung $\frac{v_4}{v_1} = \frac{v_3}{v_2}$ auch für die isothermischen Arbeiten, für welche das Integral $\int p\,dv$ mit Rücksicht auf $p = \frac{RT}{v}$ beziehungsweise der Werthe $-RT_1 \log.\text{nat.} \frac{v_4}{v_1}$ und $+ RT_2 \log.\text{nat.} \frac{v_3}{v_2}$ liefert, die eben den absoluten Temperaturen proportional sind (siehe Formel 135).

Denken wir uns nun den Kreisprocess in der Art ausgeführt, dass zunächst eine adiabatische Compression des im Volumen v_1 enthaltenen Gases auf v_2, also entsprechend der adiabatischen Curve AB, und verbunden mit der Temperaturerhöhung von T_1 auf T_2 stattfinde, sodann die isothermische Ausdehnung von v_2 auf v_3 entsprechend der Curve BC und

*) Man beachte, dass bei Gasen U eine Function von t allein ist.

unter Aufnahme der Wärme Q_2 vom Körper K_2 bei gleichzeitiger Arbeitsverrichtung EQ_2, worauf dann die adiabatische Ausdehnung von v_3 auf v_4 längs CD mit der Temperaturabnahme von T_2 auf T_1 und schliesslich die isothermische Compression DA von v_4 auf v_1 unter Wärmeabgabe Q_1 an K_1 und entsprechendem Arbeitsverbrauch EQ_1 erfolge, so müssen nach dem Gesagten die bei den Temperaturen T_2 und T_1 beziehungsweise geleistete und verbrauchte Arbeit (deren Differenz offenbar durch die Fläche $ABCD$ dargestellt erscheint), in der Beziehung stehen: $EQ_2 : EQ_1 = T_2 : T_1$; dasselbe gilt sonach auch von den äquivalenten Wärmemengen: $Q_2 : Q_1 = T_2 : T_1$.

Es stellen sich demnach die Grössen

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 224)$$

die man erhält, wenn man die in Arbeit umgesetzte oder aus Arbeit entstandene Wärme durch die absolute Temperatur, bei welcher dies geschah, dividirt, als gleiche Grössen dar, und es liegt desshalb der Gedanke nahe, von diesen Grössen bei der Beurtheilung der Aequivalenzwerthe dieser Verwandlungsart, nämlich der Umsetzung von Wärme in Arbeit oder umgekehrt, Gebrauch zu machen. Dieser Gedanke gewinnt nachgerade die vollste Berechtigung, wenn wir nach dem Vorgange von Clausius beispielsweise die einer Disgregationsänderung äquivalente Umsetzung von Wärme in Arbeit betrachten.

Wir denken uns ein Gasquantum, das eine Mal bei der Temperatur T_1, das andere Mal bei der Temperatur T_2 auf das doppelte Volumen ausgedehnt, — so haben wir in beiden Fällen dieselbe Verwandlung der Disgregation, aber in beiden Fällen den Temperaturen T_1 und T_2 proportionale Arbeitsverrichtungen, da ja die Expansionsdrucke, mit welchen das Gas in beiden Fällen arbeitet, diesen Temperaturen proportional sind. Es sind sonach auch die dabei in Arbeit umgesetzten Wärmemengen Q_1 und Q_2 diesen Temperaturen proportional. Die Aequivalenzwerthe der in diesen Umsetzungen bestehenden Verwandlungen müssen aber in beiden Fällen gleich sein, da sie ja zugleich die Aequivalenzwerthe einer und derselben Disgregationsveränderung vorstellen sollen. Dieser Bedingung wird entsprochen, wenn wir den Aequivalenzwerth einer Umsetzung von Arbeit in Wärme oder umgekehrt, in der Art bestimmen, dass wir die bei dieser Umsetzung in Betracht

kommende Wärmemenge durch die absolute Temperatur, bei welcher der Umsatz geschieht, dividiren, wobei nach einer von uns bereits vereinbarten Regel beziehungsweise das Zeichen + oder — vorzusetzen ist.

Wir wollen nun weiterhin nachsehen, wie der Aquivalenzwerth derjenigen Verwandlungen zu bestimmen ist, welche in einer Ueberführung von Wärme bestehen. Zu diesem Zwecke wird uns die für den betrachteten Kreisprocess, bei welchem wir eben diese Art von Verwandlungen kennen gelernt haben, gefundene Beziehung $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ oder

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 225)$$

dienlich sein können, wenn wir sie vorerst noch in ihrer Anwendung auf Kreisprocesse mit verschiedenen vermittelnden Körpern untersucht haben werden. — Denken wir uns in der That einen andern Körper den im Kreisprocesse betrachteten Zustandsänderungen unterworfen, d. i., wie wir zu sagen pflegen, als vermittelnden Körper gewählt, jedoch innerhalb derselben Temperaturgrenzen T_1 und T_2 und nehmen wir an, es würde von diesem neuen Körper die Wärme Q_2' bei der isothermischen Expansion aus K_2 aufgenommen und die Wärme Q_1' bei der isothermischen Compression an K_1 abgegeben, also von K_2 auf K_1 übergeführt, so ist sofort einleuchtend, dass auch hier $\frac{Q_2' - Q_1'}{Q_1'} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$ sein muss.

Wir sind auf diese Art zu einem, wie wir bald sehen werden, sehr wichtigen Lehrsatze gelangt, welcher aussagt, dass bei allen innerhalb derselben Temperaturgrenzen stattfindenden Kreisprocessen das Verhältniss zwischen der in Arbeit umgesetzten oder aus Arbeit entstandenen Wärme ($Q_2 - Q_1$) und der gleichzeitig übergeführten Wärme (Q_1) constant ist. Die vorgetragene Beweisführung bezieht sich zwar unmittelbar nur auf gasförmige Körper, doch können wir das gefundene Resultat insofern auch auf andere Körper, mit welchen wir uns Kreisprocesse ausgeführt denken, ausdehnen, als sich leicht nachweisen lässt, dass für zwei beliebige Körper, deren einer allenfalls ein gasförmiger sein mag, die Beziehung

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{Q_2' - Q_1'}{Q_1'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 226)$$

Geltung haben muss, wenn wir nach einander mit beiden

Körpern Kreisprocesse der beschriebenen Art (wir wollen sie künftighin **Carnot'sche** Kreisprocesse nennen) innerhalb derselben Temperaturgrenzen T_1 und T_2 ausführen.

Wir wollen einen diesbezüglichen indirecten Beweis sofort folgen lassen. Aus der zu beweisenden Relation folgt zunächst $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2' - Q_1'} = \frac{Q_1}{Q_1'}$. Wir wollen die Unmöglichkeit der Annahme $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2' - Q_1'} \gtrless \frac{Q_1}{Q_1'}$ nachweisen. Es sei $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2' - Q_1'} = \frac{m}{n}$, also $n Q_2 - n Q_1 = m Q_2' - m Q_1'$ (α) oder $m Q_1' - n Q_1 = m Q_2' - n Q_2$ (β); und nehmen wir dagegen beispielsweise an, es sollte $\frac{Q_1}{Q_1'} < \frac{m}{n}$ also $n Q_1 < m Q_1'$, folglich $m Q_1' - n Q_1 > 0$ (γ) sein, somit auch $m Q_2' - n Q_2 > 0$ (δ).

Denkt man sich nun den Kreisprocess mit dem ersten Körper n mal direct (nämlich in der Ordnung $ABCDA$ (Fig. 109)) und dann mit dem andern Körper m mal retrograd ($ADCBA$) ausgeführt, so würde dabei die Gesammt-Arbeit $E[n(Q_2 - Q_1) - m(Q_2' - Q_1')]$, welche nach Gleichung (α) offenbar 0 ist, resultiren, während andererseits der Körper K_2 die Wärmemenge $m Q_2' - n Q_2$ gewinnen, dagegen aber der Körper K_1 die Wärme $m Q_2' - n Q_1$ verlieren würde, welche Wärmemengen nach Gleichung (β) einander gleich und nach Gleichung (γ) und (δ) positiv sind. Es wäre sonach ohne jeden Arbeitsverbrauch (Arbeitsaufwand) Wärme vom kälteren Körper auf den wärmeren Körper übergeführt worden. Ein solcher Vorgang würde aber allen Erfahrungen, welche wir über Wärmeaustausch zwischen Körpern verschiedener Temperatur besitzen, widersprechen, da die Wärme vielmehr überall das Bestreben äussert, Temperaturdifferenzen auszugleichen und sonach, wie **Clausius** hervorgehoben hat, eine Ueberführung der Wärme von einem kälteren auf einen wärmeren Körper ohne Arbeitsaufwand unstatthaft ist. Ebenso könnte die Unzulässigkeit der Annahme $\frac{Q_1}{Q_1'} > \frac{m}{n}$ nachgewiesen werden, da eine $m$malige Ausführung des Kreisprocesses mit dem ersten Körper in directem und eine $n$malige mit dem zweiten Körper in umgekehrtem Sinne zu demselben absurden Ergebnisse führen würde. Wir können sonach die Gleichung 225

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad \ldots \ldots \quad 227)$$

als eine für alle Körper, welche zwischen denselben Temperaturgrenzen T_2 und T_1 Carnot'sche Kreisprocesse ausführen, geltende Beziehung ansehen.

Indem wir beiderseits mit Q_1 multipliciren, und mit T_2 dividiren, erhalten wir $\frac{Q_2 - Q_1}{T_2} = Q_1 \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$, was wir auch in der Gestalt

$$-\frac{Q_2 - Q_1}{T_2} + Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 228)$$

schreiben können.

Hier stellt $-\frac{Q_2 - Q_1}{T_2}$ den (nach unserer Uebereinkunft als negativ anzusehenden) Aequivalenzwerth der Verwandlung von Wärme $Q_2 - Q_1$ in Arbeit vor und $+ Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ ist demnach der gesuchte Ausdruck für den (nach Uebereinkunft positiven) Aequivalenzwerth der Ueberführung von Wärme Q_1 von höherer Temperatur (T_2) auf tiefere (T_1).

Diese Darstellung der Aequivalenzwerthe entspricht, wie wir sehen, der Anforderung, von der wir ausgegangen sind, dass Verwandlungen, welche sich compensiren, wie beim Kreisprocesse der Wärme- oder Arbeitsumsatz einerseits und die gleichzeitige Ueberführung von Wärme zu tieferer oder höherer Temperatur andererseits, durch gleiche Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt werden, so dass die Summe solcher Verwandlungen Null ist. Wir nennen, wie wir bereits an einer anderen Stelle bemerkt haben, solche Verwandlungen äquivalent und können nunmehr den Sinn dieser Aequivalenz noch aus einem anderen Gesichtspunkte erläutern; wir können auch sagen, dass wir Verwandlungen äquivalent nennen, welche sich, ohne sonstige bleibende Veränderungen zu bedingen, gegenseitig ersetzen können. Dies ist z. B. bei den am Kreisprocesse betrachteten Verwandlungen in der Art möglich, dass, während eine Verwandlung der ersten Art rückgängig gemacht wird, eine Verwandlung der zweiten Art an die Stelle tritt. Man kann z. B. die bei einem Kreisprocesse unter Umsetzung von Wärme ($Q_2 - Q_1$) in Arbeit von K_2 nach K_1 gebrachte Wärme Q_1 dem Körper K_1 wieder entziehen und nach K_2 zurück transportiren, indem man eben den Kreisprocess umkehrt; es tritt aber dann eine Umsetzung von Arbeit in Wärme

$(Q_2 - Q_1)$ an die Stelle, oder wir können z. B. eine eingetretene Umsetzung von Wärme $(Q_2 - Q_1)$ in Arbeit durch einen entsprechend ausgeführten Kreisprocess wieder rückgängig machen und die Arbeit wieder in Wärme $(Q_2 - Q_1)$ zurückverwandeln, aber es tritt sodann ein Wärmeübergang vom kälteren zum wärmeren Körper an die Stelle. Kehren wir noch einmal auf die Gleichung 228 zurück, indem wir den Aequivalenzwerth $Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ der eingetretenen Wärmeüberführung betrachten, so wird ersichtlich, dass wir diesen Aequivalenzwerth als die Summe zweier Aequivalenzwerthe $+\frac{Q_1}{T_1}$ und $-\frac{Q_1}{T_2}$ ansehen können, von welchen der erste einem Umsatz von Arbeit in Wärme Q_1 bei der Temperatur T_1, der andere einem Umsatz von Wärme Q_1 in Arbeit bei der Temperatur T_2 entsprechen würde. Lösen wir ebenso den Aequivalenzwerth $-\frac{Q_2 - Q_1}{T_2}$ für den Wärmeumsatz auf in $-\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_2}$, was einem einmaligen Umsatze von Wärme Q_2 in Arbeit bei der Temperatur T_2 und sodann einem Arbeitsumsatz in Wärme Q_1 von der Temperatur T_2 entsprechen würde, so erscheint Gleichung 228 in der Gestalt: $-\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_1}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$, übereinstimmend mit Gleichung 224.

Auf solche Art kann man bei jedem noch so complicirten Kreisprocesse, in welchem beliebig viele Verwandlungen der beiden Arten vorkommen, leicht den mathematischen Ausdruck aller Aequivalenzwerthe berechnen, indem man eben für jedes Wärmereservoir jede empfangene Wärme als aus Arbeit entstanden und jede abgegebene als in Arbeit verwandelt, in Rechnung bringt.*)

*) Zeuner erläutert den Carnot'schen Kreisprocess und die Bedeutung der Entropie (siehe den nächsten Paragraphen) durch Einführung des Begriffes der sogenannten Wärmegewichte. Man gelangt zu dieser Vorstellung durch Vergleichung der Wärmemengen Q_2 und Q_1, welche bei den Temperaturen T_2 und T_1 beziehungsweise aufgenommen und abgegeben werden mit Arbeitsvorräthen $W_2 = GH_2$ und $W_1 = GH_1$ (Energie der Lage), welche ein in den Höhen H_2 und H_1 befindliches Gewicht $G = \frac{W_2}{H_2} = \frac{W_1}{H_1}$ repräsentirt, dessen Herabsinken von H_2 auf H_1 einer Arbeitsverrichtung $W_2 - W_1 = G(H_2 - H_1)$ entspricht. Es wird dabei

Wir können die Sache endlich auch so auffassen. Die bei all den Verwandlungen, mit welchen wir uns beschäftigt haben, in Betracht kommenden Wärmemengen sind von einem vermittelnden Körper bei gewissen Temperaturen abgegeben, beziehungsweise aufgenommen worden, wobei wir unsere Ausdrucksweise so einrichten können, dass wir eine Wärmeaufnahme als negative Wärmeabgabe auffassen und demnach sagen, dass jenen Verwandlungen durchwegs gewisse (positive oder negative) Wärmeabgaben von Seite des vermittelnden Körpers bei gewissen Temperaturen entsprechen.

(**Entropie.**) Es liegt nahe, auch diese Wärme-Abgaben oder Aufnahmen als mathematische Grössen in der Art zu betrachten, dass wir sie durch die Quotienten des vom vermittelnden Körper abgegebenen Wärmequantums durch die Temperatur, bei welcher die Abgabe stattfand, messen. Für den betrachteten Kreisprocess ist die Summe der so gemessenen Wärmeabgaben des vermittelnden Körpers $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$; wir haben dabei eine Wärmeabgabe von Seite des vermittelnden Körpers, d. i. also eine Wärmeaufnahme von Seite des betreffenden Wärmereservoirs als eine positive Grösse angesehen; es wird aber an der Sache im Wesentlichen gar nichts geändert, wenn wir, wie es bei anderen Betrachtungen bequemer erscheint, eine Wärmeaufnahme von Seite des vermittelnden Körpers als positiv und die Abgabe als negativ in Rechnung bringen, in beiden Fällen jedoch numerisch gemessen durch die in Betracht kommende Wärmequantität dividirt durch die absolute Temperatur bei der Aufnahme oder Abgabe. Wir wollen die Summe aller so gemessenen, bei einer Reihe

---

gewissermassen das im Niveau H_2 einem Reservoir (K_2) von gleichem Niveau entnommene „Wärmegewicht" $\left(G = \frac{W_2}{H_2} = \frac{W_1}{H_1}\right.$ entsprechend dem $\left.\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}\right)$, nach verrichteter Arbeit beim Niedersinken, im Niveau H_1 an ein im gleichen Niveau befindliches Reservoir (K_1) abgeliefert. Der Vergleich lässt sich leicht verallgemeinern und führt dann zu dem Resultate, dass die algebraische Summe der in solcher Weise zugelieferten Wärmegewichte (die abgelieferten als negativ gerechnet) $= 0$ ist, analog dem Ausdrucke $\Sigma \frac{Q}{T} = 0$ oder beziehungsweise $\int \frac{dQ}{T} = 0$.

von Zustandsänderungen eingetretenen Wärmeaufnahmen Entropie heissen (Clausius). Wir werden dann im betrachteten Kreisprocesse $\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$ die Entropie nennen. Sie ist, wie wir sehen, $= 0$.

Dieses Ergebniss lässt sich ohne Schwierigkeit auf einen complicirteren Kreisprocess, in welchem bei mehreren verschiedenen Temperaturen Wärmeaufnahmen (beziehungsweise Abgaben) stattfinden, ausdehnen und man erhält dann den Ausdruck

$$\Sigma \frac{Q}{T} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 229)$$

Findet endlich ein Kreisprocess *ABCDA* (Fig. 110) unter stetigen Temperaturänderungen (T, T', ...) statt, so wird an die Stelle der Summirung die Integration treten, und der Ausdruck für die Entropie des Kreisprocesses ist

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 230)$$

Dies alles setzt, wie bereits erwähnt, einen umkehrbaren Kreisprocess voraus. Finden umkehrbare Zustandsänderungen statt, welche keinen Kreisprocess (z. B. einen unvollendeten Kreisprocess, wie etwa bei der Zustandsänderung *BC* (Fig. 109 oder auch Fig. 110)) bilden, so wird eben der Werth der Entropie im Allgemeinen, insofern nämlich nicht gerade eine adiabatische Zustandsänderung, für welche dQ und somit auch die Entropie $= 0$ ist, stattfindet, von 0 verschieden ausfallen, so dass wir schreiben können:

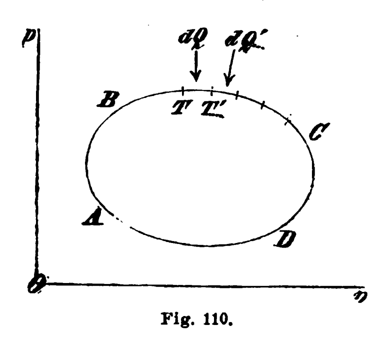


Fig. 110.

$$\int \frac{dQ}{T} = \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 231)$$

oder

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \mu_2 - \mu_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 232)$$

wenn wir zwei verschiedene Zustände mit den Stellenzeigern 1

und 2 andeuten. Kehrt der Körper in seinen Anfangszustand zurück, so wird $\mu_2 = \mu_1$ und die Formel $\int \frac{dQ}{T} = 0$ erscheint als ein specieller Fall von Formel 232.

Die Gleichung 231 lässt sich auch in der Gestalt

$$\frac{dQ}{T} = d\mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad 233)$$

schreiben, welche ersichtlich macht, dass im Falle einer adiabatischen Zustandsänderung ($dQ = 0$) das Differentiale der Entropie $d\mu = 0$, somit die Entropie $\mu =$ Const.; in diesem Sinne können wir die adiabatische Curve auch die Curve von constanter Entropie nennen, und wir wollen sogleich hinzufügen, dass die andere im Kreisprocesse betrachtete Curve die isothermische nämlich, als ein specieller Fall der Curve von constanter Energie, auch isodynamische Curve genannt (Cazin), anzusehen ist, insofern die Energie, wie wir wissen, bei Gasen eine Function der Temperatur allein ist, wesshalb die isodynamische Curve in diesem Falle mit der isothermischen identisch wird.

(**Die Entropie als Verwandlungsinhalt.**) Die Entropie lässt sich nach Clausius auch auffassen als die Summe der Aequivalenzwerthe der Verwandlungen, welche erforderlich waren, um einen Körper in seinen gegenwärtigen Zustand zu versetzen. Wir wollen diese Anschauung etwas näher erläutern.

Bei der Zustandsänderung eines Körpers kommt einerseits der Wärmeinhalt desselben und andererseits die Anordnung seiner Theilchen in Betracht. Bezeichnen wir mit dH eine Aenderung der nicht von der Anordnung der Theilchen, sondern nur von der Temperatur abhängigen Körperwärme und mit $\frac{dH}{T}$ den bezüglichen Aequivalenzwerth, so stellt sich uns $\int \frac{dH}{T}$ als eine durch den Zustand des Körpers völlig bestimmte, von dem Wege der Zustandsänderungen unabhängige Grösse dar, die wir uns von einem beliebigen Anfangszustande aus gemessen denken können und den Aequivalenzwerth der von diesem Anfangszustande aus gerechneten Körperwärme nennen wollen. Nennen wir andererseits Z die Disgregation, d. i. den Verwandlungswerth von Werk in Wärme, welche zur Rückgängigmachung der Disgregration nothwendig wäre, also

den Verwandlungswerth der gegenwärtigen Anordnung der Bestandtheile und dZ eine Aenderung dieses Verwandlungswerthes, so können wir schreiben: $\frac{dQ}{T} = \frac{dH}{T} + dZ$, somit für zwei Grenzzustände, welche durch 1 und 2 angedeutet sein sollen, $\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \mu_2 - \mu_1 = \int_1^2 \frac{dH}{T} + Z_2 - Z_1$ oder, wenn wir $\int_1^2 \frac{dH}{T} = Y_2 - Y_1$ setzen, auch $\mu_2 - \mu_1 = (Y_2 + Z_2) - (Y_1 + Z_1)$. Die Entropie erscheint demnach als die Summe der Verwandlungswerthe des Wärmeinhaltes und der Anordnung der Körpertheilchen (Disgregation), welche Summe Clausius auch Verwandlungsinhalt (als gleichbedeutend mit Entropie) bezeichnet hat, eine Benennung, welche analog ist jener der Energie als Summe von Wärmeinhalt und Werkinhalt.

(**Formulirung und Erweiterung des zweiten Hauptsatzes.**) In den Gleichungen $-\frac{Q_2 - Q_1}{T_2} + Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 0$ und beziehungsweise $\mu_2 - \mu_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ kommt der Grundsatz, nach welchem die Aequivalenzwerthe der Verwandlungen zu bestimmen sind, zum mathematischen Ausdrucke. Dieser von Clausius aufgestellte Grundsatz wird als der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet und auch der Satz von der Aequivalenz der Verwandlungen genannt. Er lässt sich auch so aussprechen, dass bei allen umkehrbaren Zustandsänderungen jede dabei vorkommende Verwandlung in dem bereits wiederholt angegebenen Sinne compensirt erscheint durch eine Verwandlung anderer Art, so dass die Summe der Aequivalenzwerthe beider = 0 ist. Lassen wir die Beschränkung auf umkehrbare Zustandsänderungen fallen, so erhält dieser Hauptsatz eine wesentliche Erweiterung, nämlich die, dass in einem solchen Falle die Summe der Aequivalenzwerthe der Verwandlungen auch grösser als 0 sein kann. Es lässt sich nämlich leicht nachweisen, dass, wenn nichtumkehrbare Zustandsänderungen nicht ausgeschlossen sind, nur jene Verwandlungen, die wir als negative bezeichnet haben, nothwendig compensirt sein müssen, während positive Verwand-

lungen auch ohne Compensation vorkommen können. In der That können wir z. B. ein Gas nicht ohne Arbeitsaufwand in einen kleineren Raum bringen, also keine uncompensirte Disgregationsverminderung herbeiführen, wohl aber tritt eine nicht compensirte Disgregationsvermehrung ein, wenn z. B. das Gas in einen leeren Raum, also ohne Arbeitsverrichtung, ausströmt. Wir können ferner, wie bereits gezeigt worden ist, nicht ohne Arbeitsaufwand Wärme von einem kälteren Körper zu einem wärmeren überführen, wohl aber kann das Umgekehrte ohne Arbeitsverrichtung eintreten, indem sowohl durch Leitung als Strahlung Wärmeübergänge positiver Art ohne Compensation möglich sind. Fügen wir noch hinzu, dass niemals Wärme in Werk umgesetzt werden kann ohne Disgregationsvermehrung oder Wärmeübergang von höherer zu tieferer Temperatur, wohl aber umgekehrt, wie z. B. durch Reibung Werk in Wärme, ohne dass gleichzeitig eine compensirende negative Verwandlung stattfände; so ergibt sich aus dem Gesagten, dass bei nichtumkehrbaren Zustandsveränderungen uncompensirte Verwandlungen, jedoch immer nur positiver Art, statthaft sind. — W. Thomson und Clausius haben diese Beziehungen mit grossem Scharfsinne erkannt und sehr bedeutungsvolle Schlussfolgerungen für die Gesammtheit aller Naturprocesse daraus abgeleitet. Die Möglichkeit uncompensirter positiver, nicht aber negativer Verwandlungen bringt, wie Clausius hervorhebt, ein Ueberwiegen der ersteren, d. h. eine Aenderung des Naturganzen in einem bestimmten Sinne mit sich, eine Aenderung, welche auf möglichste Disgregationsvermehrung, Umsetzung von Werk in Wärme und Ausgleichung aller Temperaturdifferenzen abzielen muss. Ein solcher Endzustand würde dann keine Veranlassung zu weiteren Verwandlungen darbieten und als Grenzzustand der Entropie des Universums aufzufassen sein, was Clausius in dem Satze ausdrückt: Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu; ein Satz, welchen er aus dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie in analoger Weise folgert, wie aus dem ersten Hauptsatze der Satz von der Erhaltung der Arbeit*) gefolgert

*) Man vergleiche, was hierüber in der Potentialtheorie gesagt ist, wo wir diesen Satz eingehend erläutert haben; siehe auch in der Mechanik Formel 50.

werden kann, welchen Clausius mit den Worten ausspricht: Die Energie der Welt ist constant.*)

(**Zweite Hauptgleichung mit Einführung der Werkdifferenz.**) Wir haben den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie in drei Gleichungen, den sogenannten Hauptgleichungen, zum Ausdrucke gebracht, nämlich in den Gleichungen für die Werkdifferenz, welche sich in Folge des ersten Hauptsatzes aus den drei Wärmegleichungen 198, 199, 200 ergeben mussten. Wir wollen nun untersuchen, ob sich vielleicht auch dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie in analoger Weise entsprechende Hauptgleichungen finden lassen.

Die drei ersten Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, die Gleichungen für die Werkdifferenz, sind im Grunde nichts Anderes gewesen, als der mathematische Ausdruck für die Nichtintegrabilität der Wärmegleichungen. Es liegt daher nahe, vor Allem zu untersuchen, wie es sich mit der Integrabilität dieser Wärmegleichungen verhält, wenn wir nicht das Wärmeelement dQ selbst, welches sie ausdrücken, sondern den Quotienten $\frac{dQ}{T}$ jenes Wärmeelementes durch die absolute Temperatur, welcher Quotient als Element der Entropie im zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie eine so hervorragende Bedeutung hat, in jene Gleichungen einführen, d. h. als Function der Veränderlichen ansehen, welche den Zustand des vermittelnden Körpers bestimmen. Dabei wollen wir anstatt der drei Wärmegleichungen 198, 199, 200 zunächst wieder die allgemeine Form derselben $dQ = Mdx + Ndy$ in Betracht ziehen und dafür schreiben: $\frac{dQ}{T} = \frac{M}{T}\,dx + \frac{N}{T}\,dy$ und nunmehr die Integrabilität der so veränderten Wärmegleichung (Gleichung der Entropie) untersuchen.

Schon die Gleichung für den Kreisprocess $\int \frac{dQ}{T} = 0$ lässt uns erkennen, dass $\mu = \int \frac{dQ}{T}$ als eine Function der unab-

*) Auch auf dem Gebiete der Chemie führt der zweite Hauptsatz in seiner Ausdehnung auf uncompensirte Verwandlungen, wie Pfaundler gezeigt hat, zu sehr wichtigen Folgerungen, welche wesentliche Umgestaltungen der bisher gangbaren Grundansichten in Aussicht stellen.

hängig veränderlichen den Körperzustand bestimmenden Variablen x und y sich herausstellt, indem ja dieser Werth von μ verschwindet, sobald der Körper, gleichviel auf welchem Wege, wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt. Dies vorausgesetzt, was wir uns für Gase noch speciell nachzuweisen vorbehalten, wäre demnach der reciproke Werth der absoluten Temperatur $\frac{1}{T}$ als ein sogenannter integrirender Factor der Differentialgleichung $dQ = Mdx + Ndy$ anzusehen, oder, wie man zu sagen pflegt, die absolute Temperatur selbst als integrirender Divisor dieser Differentialgleichung. Die Integrabilität wird sodann ausgedrückt durch die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{T}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{T}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 234)$$

Wir finden sofort

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} \cdot T - \frac{\partial T}{\partial x} \cdot N}{T^2} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} \cdot T - \frac{\partial T}{\partial y} \cdot M}{T^2},$$

folglich $T\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{\partial T}{\partial x} N - \frac{\partial T}{\partial y} M$, woraus mit Beibehaltung der Bezeichnung $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \triangle_{y,x} =$ Werkdifferenz, hervorgeht:

$$\frac{\partial T}{\partial x} N - \frac{\partial T}{\partial y} M = T\triangle_{y,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 235)$$

welche Gleichung als allgemeine Form der **zweiten Hauptgleichung** der mechanischen Wärmetheorie anzusehen ist.

Es ergeben sich hieraus mit Benutzung der Wärmegleichungen:

$$dQ = cdt + ldv,$$
$$dQ = Cdt + hdp,$$
$$dQ = \xi dp + \eta dv$$

folgende besondere Formen (die sogenannten W. **Thomson'**schen Gleichungen), bei deren Ableitung wir ohne Weiteres die in den Formeln 209, 210 und 211 bereits angegebenen Werthe für die Werkdifferenzen einsetzen.

Für $x = t$, $y = v$ folgt, wenn wir zugleich $dT = d(273 + t)$

$= dt$ schreiben, $\frac{\partial t}{\partial t} l - \frac{\partial t}{\partial v} \cdot c = T \cdot A \frac{\partial p}{\partial t}$, also, wie leicht ersichtlich*)

$$l = AT \frac{\partial p}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 236)$$

Für $x = t$, $y = p$ finden wir:

$$\frac{\partial t}{\partial t} h - \frac{\partial t}{\partial p} C = - TA \frac{\partial v}{\partial t}; \text{ folglich}$$

$$h = - AT \frac{\partial v}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 237)$$

Endlich für $x = p$ und $y = v$

$$\frac{\partial t}{\partial p} \eta - \frac{\partial t}{\partial v} \xi = AT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 238)$$

(Entropie der Gase.) Speciell für Gase lässt sich die Integrabilität von $\frac{dQ}{T}$ mittelst der entsprechend umgestalteten Wärmegleichungen leicht nachweisen. Wir erinnern uns zunächst an den bekannten Versuch von Joule, bei welchem er in einem Calorimeter comprimirte Luft aus einem metallenen Recipienten in einen gleich grossen luftleeren überströmen liess und keine Temperaturveränderung im Calorimeter beobachtete. Da also in diesem Falle $dQ = 0$ ist und andererseits auch keine verrichtete Arbeit in Betracht kommt, also auch $dL = pdv = 0$ erscheint, so folgt aus der Grundgleichung $dQ = A(dU + pdv)$, dass auch $dU = 0$ war. Die Energie ist demnach ungeachtet der. Aenderungen von Druck und Volumen constant geblieben und kann daher bei Gasen nur als eine Function der Temperatur betrachtet werden. Beachten wir nun, indem wir zuvörderst die Gleichung $dQ = cdt + ldv$ benutzen, dass nach Formel 214 $l = A\left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)$ und nach dem soeben Gesagten $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$ sein muss, so erhält die Gleichung die Gestalt $dQ = cdt + Apdv$ oder $dQ = cdt + ART\frac{dv}{v}$ und durch Einführung der absoluten Temperatur $T = 273 + t = a + t$ als integrirender Divisor $\frac{dQ}{a+t} = c \cdot \frac{dt}{a+t} = AR\frac{dv}{v}$, durch deren Integration $\int \frac{dQ}{a+t} = \mu = c$ log. nat $(a + t) +$

*) Wegen $\frac{\partial t}{\partial t} = 1$ und $\cdot \frac{\partial t}{\partial v} = 0$, da t und v von einander unabhängig sind.

AR log. nat v + log. nat B hervorgeht;*) also mit Einführung des Werthes für $R = \frac{C-c}{A}$ (Formel 222)

$$\mu = \text{log. nat}\, T^c + \text{log. nat}\, v^{C-c} + \text{log. nat}\, B = \text{log. nat}(T^c \cdot v^{C-c} \cdot B)$$

$= \text{log. nat}\left(\frac{B}{R^c} p^c v^C\right)$ oder, wenn $\frac{B}{R^c} = b$ gesetzt wird

$$\mu = \text{log. nat}\,(b p^c v^C) \quad \ldots \ldots \quad 239)$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{e^\mu}{b} = p^c v^C \quad \ldots \ldots \ldots \quad 240)$$

was unter Voraussetzung einer adiabatischen Zustandsänderung (μ = Const.) den bekannten Ausdruck des Poisson'schen Gesetzes liefert

$$p^c v^C = \text{Const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 241)$$

und, wegen $C = Rc$ auch in der Form $p v^k$ = Const. geschrieben werden kann.

In ähnlicher Weise findet man mit Benutzung der Wärmegleichung für t und p mit Einführung des Werthes von $h = A\left(\frac{\partial U}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right)$ und mit Rücksicht auf $\frac{\partial U}{\partial p} = 0$; also $h = Ap\frac{\partial v}{\partial p}$ zunächst: $dQ = Cdt + Ap\frac{\partial v}{\partial p}dp$. Setzt man nun für $\frac{\partial v}{\partial p}$ den aus $v = \frac{RT}{p}$ folgenden Werth $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$ ein, so wird $dQ = Cdt - ART\frac{dp}{p}$; folglich $\int\frac{dQ}{a+t} = \mu = C\int\frac{dt}{a+t} - AR\int\frac{dp}{p}$; also wegen $AR = C - c$, auch

$$\mu = \text{log. nat}\,(T^C \cdot p^{c-C} \cdot B) = \text{log. nat}\left(\left(\frac{pv}{R}\right)^C \cdot p^{c-C} \cdot B\right),$$

woraus, wenn $\frac{B}{R^C} = b$ gesetzt wird, folgt:

$\mu = \text{log. nat}\,(bp^c v^C)$ oder $\frac{e^\mu}{b} = p^c v^C$ wie oben (Formel 240).

(**Verallgemeinerung.**) Wir haben somit für Gase direct nachgewiesen, dass die absolute Temperatur als integrirender Divisor der Wärmegleichung sich darstellt, und wir nehmen

*) Wobei log. nat B die Integrationsconstante vertritt.

die Gültigkeit dieses Resultates mit Rücksicht auf die vorausgegangenen Erörterungen auch für andere Körper in Anspruch. In der That gestatten die bereits entwickelten zweiten Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie (236, 237 und 238) unter dieser Voraussetzung sehr wichtige Anwendungen bei der Betrachtung der Zustandsänderungen der Körper, insbesondere der Aenderungen des Aggregationszustandes und wir wollen beispielsweise einen und den andern Fall dieser Art untersuchen.

(**Anwendungen der Thomson'schen Gleichungen.**) Manche Körper haben die Eigenschaft, innerhalb gewisser Grenzen einen negativen Ausdehnungscoëfficienten zu besitzen, d. h. bei einer Erwärmung sich zusammen zu ziehen. Dies ist z. B. beim Wasser innerhalb der Temperaturgrenzen 0^0 *C* und 4^0 *C* der Fall, bei welcher letzteren Temperatur es ja bekanntlich seine grösste Dichte hat.*) Die mechanische Wärmetheorie lehrt nun — und das Experiment hat diese Schlussfolgerung bestätigt — dass solche Körper, wenn sie innerhalb der besagten Grenzen adiabatisch comprimirt werden, nicht eine Erwärmung, sondern eine Abkühlung erfahren. Gehen wir nämlich aus von der Wärmegleichung $dQ = Cdt + hdp$ und setzen wir nach Gleichung 237 den Werth $h = - AT\frac{\partial v}{\partial t}$ ein, während wir andererseits berücksichtigen, dass nach unserer Voraussetzung $dQ = 0$ ist (indem ja eine Wärmeab- oder -zuleitung nicht stattfinden soll), so ergibt sich zuvörderst $Cdt - AT\frac{\partial v}{\partial t}dp = 0$; es ist aber $\frac{\partial v}{\partial t}$ offenbar $= \alpha v$, wenn α den Ausdehnungscoëfficienten bedeutet (da ja $v\alpha dt$ die einer Temperaturerhöhung dt entsprechende Volumszunahme ausdrückt). Wir erhalten demnach die Gleichung:

$$dt = \frac{\alpha ATv}{C} \cdot dp \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 242)$$

woraus hervorgeht, dass einer adiabatischen Zunahme des Druckes eine Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur entspricht, je nachdem der Ausdehnungcoëfficient positiv oder

*) Hierher gehören auch die von Gore und Barrett beobachteten Erscheinungen bei der Abkühlung eines glühenden Eisendrahtes (anomale Ausdehnung und Recalescenz).

negativ ist. Joule hat dies beim Wasser experimentell constatirt.

Eine andere wichtige Anwendung der Thomson'schen Gleichungen bezieht sich auf die Aenderungen des Aggregationszustandes. In dieser Hinsicht ist namentlich die Gleichung 236 von Wichtigkeit: $l = AT\frac{\partial p}{\partial t}$.

Führen wir nämlich diesen Werth ein in die Wärmegleichung $dQ = cdt + ldv$ und betrachten wir den Fall des Ueberganges aus einem Aggregationszustande in den andern, wobei $dt = 0$ zu setzen ist, so wird $dQ = AT\frac{dp}{dt}dv$. Wir nehmen an, es handle sich im vorliegenden Falle um den Schmelzungsprocess des Eises. Es sei ein Kilo Mischung von Eis und flüssigem Wasser gegeben und zwar im betrachteten Augenblicke x Kilo Wasser und $1 - x$ Kilo Eis; es seien ferner die specifischen Volumina (Volumina der Gewichtseinheit) für Wasser und Eis beziehungsweise s und σ, so ist offenbar das gegebene Gesammtvolumen $v = xs + (1 - x)\sigma = x(s - \sigma) + \sigma$ oder, wenn wir $s - \sigma = u$ setzen, $v = ux + \sigma$; folglich $dv = udx$, welcher Werth oben eingesetzt die Gleichung liefert $\frac{dQ}{dx} = AT\frac{dp}{dt}u$. Der Differentialquotient $\frac{dQ}{dx}$ stellt nun offenbar die sogenannte Schmelzungswärme des Eises vor, die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um durch Eisschmelzung ein Kilo Wasser zu liefern. Wir wollen im Allgemeinen $\frac{dQ}{dx} = r$ setzen, wodurch wir erhalten

$$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt} \quad \text{. . . . .} \quad 243)$$

die sogenannte Clapeyron'sche Gleichung, in welcher ursprünglich statt AT die Carnot'sche Temperaturfunction stand, deren Bedeutung später Helmholtz nachwies, worauf wir hier nicht weiter eingehen wollen; eine Gleichung, die schliesslich von Clausius in die gegenwärtige Form gebracht worden ist. Wir folgern aus derselben

$$dt = AT\frac{u}{r}dp \quad \text{. . . . . . .} \quad 244)$$

Diese Gleichung lässt uns Aenderungen dt der Schmelzungstemperatur erkennen, welche durch Druckänderungen dp hervorgebracht werden, während eben T die gegenwärtige

Schmelzungstemperatur vorstellt. Dieselbe ist für Eis (beim normalen Drucke) $T = 273$; andererseits ist bekanntlich $r = 79{,}25$ und $u = s - \sigma = 0{,}001 - 0{,}0011 = - 0{,}0001$ (Kubikmeter). Wenn wir endlich noch dp nicht auf die Druckeinheit eines Kilo, sondern einer Atmosphäre = 10334 Kilo pro Flächeneinheit beziehen, so finden wir $dt = - \frac{273 . 0{,}0001 . 10334}{424 . 79{,}25} dp$, was annähernd $dt = - 0{,}008\, dp$ liefert, d. h. für eine Druckzunahme vom Betrage einer Atmosphäre würde der Gefrierpunkt (zugleich Schmelzungstemperatur) um $0{,}008^0\, C$ erniedrigt werden, also etwa bei 125 Atmosphären Druck um $1^0\, C$. Hieraus folgt, dass Eis unter hohem Drucke flüssig werden muss, ein von James Thomson theoretisch gefundenes und von William Thomson experimentell bestätigtes Ergebniss, auf welchem unter Anderem auch die Erklärung der Gletscherbewegung beruht. Die unteren Schichten grosser Eismassen müssen unter dem hohen Drucke, der auf ihnen lastet, und der dadurch bedingten Erniedrigung des Gefrierpunktes gewissermassen in einem plastischen, zähflüssigen Zustande sich befinden, welcher die an den Gletschern längst beobachteten Bewegungen bedingt. Hieher gehören auch die Versuche Tyndall's, der die Plasticität des Eises durch Druck durch zahlreiche Versuche in der überzeugendsten Weise dargethan hat, indem er z. B. zeigte, dass Eis in Formen gepresst und Bruchstücke durch Druck in eine zusammenhängende durchsichtige Eismasse vereinigt werden können u. s. w.

Fig. 111.

Einen augenfälligen Beweis für das Flüssigwerden des Eises unter hohem Drucke hat Mousson geliefert. Man denke sich ein cylindrisch durchbohrtes Stahlprisma (Fig. 111), welches beiderseits mit entsprechend eingerichteten Schraubenverschlüssen bei A und B versehen werden kann. Es wurde zunächst der Verschluss bei B gemacht, die cylindrische Höhlung mit Wasser gefüllt, in dieselbe ein Kupferstift a gelegt und hierauf das Wasser zum Gefrieren gebracht; sodann wurde der Verschluss bei A hergestellt und durch Anziehen der Verschlussschraube ein sehr grosser Druck auf das eingeschlossene Eis ausgeübt, bei einer Temperatur, welche unter dem gewöhnlichen Gefrierpunkte des Wassers war. Als hierauf die Vorrichtung umgekehrt und bei B geöffnet wurde, zeigte es sich, dass der Kupferstift nicht mehr bei B

eingefroren sich befand, sondern bei A. Das Wasser war nämlich durch den Druck flüssig geworden, liess den Kupferstift bei umgekehrter Lage der Vorrichtung von B nach A gleiten, fror aber sofort wieder, als der Verschluss B geöffnet und damit der hohe Druck aufgehoben wurde.

Die Formel 241 lehrt, dass eine Erniedrigung des Schmelzpunktes durch Druck bei allen Substanzen eintreten muss, welche ein negatives u, das ist im festen Zustande ein grösseres specifisches Volumen haben als im flüssigen, wie dies eben beim Wasser der Fall ist. Die Formel findet auch sehr wichtige Anwendungen bei der Untersuchung des Vorganges der Verdampfung, beziehungsweise des Verhaltens der Dämpfe, und sie hat in dieser Richtung zu Resultaten geführt, auf welchen unter Anderem ganz wesentliche Umgestaltungen in der Theorie der Dampfmaschinen beruhen. Siehe unten Seite 267.

(**Thermodynamische Maschinen.**) Wir kehren schliesslich nochmals zum Carnot'schen Kreisprocesse zurück, welchen wir bereits eingehend betrachtet haben. Wir müssen noch hinzufügen, dass das Gesetz, nach welchem der bei diesem Processe stattfindenden Arbeitsleistung der Uebergang eines gewissen Wärmequantums von einem wärmeren zu einem kälteren Körper entspricht, bereits von Carnot erkannt, jedoch nicht ganz richtig formulirt worden ist, indem er der Ansicht war, dass die ganze, bei der höheren Temperatur aufgenommene Wärme zur tieferen Temperatur übergehe, und, wie er sich ausdrückt, constant bleibe. Clausius hat die Unrichtigkeit dieses Zusatzes dargethan, indem er den Umsatz eines Theiles der bei der höheren Temperatur aufgenommenen Wärme in Arbeit nachwies, wie dies bereits oben des Näheren erläutert worden ist. Wir sind bei diesen Betrachtungen des Kreisprocesses zu dem Resultate gekommen, dass $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Folgern wir hieraus

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 245)$$

so stellt uns die Grösse links vom Gleichheitszeichen, nämlich das Verhältniss der in Arbeit umgesetzten Wärme zur ganzen bei der höheren Temperatur aufgenommenen Wärme, den sogenannten ökonomischen Effect vor, der bei der Durchführung eines Carnot'schen Kreisprocesses erzielt wird. Derselbe nähert

sich, wie ersichtlich, bei zunehmender Ungleichheit der Grenztemperaturen T_1 und T_2, d. i. bei abnehmendem Verhältnisse $\frac{T_1}{T_2}$, immer mehr der Einheit; ein wichtiger leitender Grundsatz für die Beurtheilung der Leistungsfähigkeit aller thermodynamischen Maschinen, die ja eben auch auf der Ausführung ähnlicher Processe beruhen, bei welchen entweder Dampf, wie bei der Dampfmaschine, oder atmosphärische Luft, wie bei der Heissluftmaschine, als vermittelnder Körper thätig ist, der Wärme von einer höheren Temperatur zu einer tieferen Temperatur überführt. Untersuchen wir nun noch, in welcher Weise der ökonomische Effect bei gleichen Grenztemperaturen vom Wege des Kreisprocesses abhängt.*) Es sei ein beliebiger Kreisprocess *abcda* gegeben. Wir umschreiben seinen Weg, wie die Zeichnung andeutet, mit dem Wege eines Carnot'schen Kreisprocesses *ABCDA*, der ersteren in vier Punkten berührt und zwar in den Punkten *a* und *c* mit den adiabatischen und in den Punkten *b* und *d* mit den isothermischen Curvenstücken,

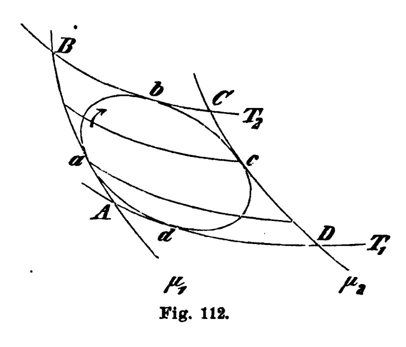


Fig. 112.

deren erstere den Werthen μ_1 und μ_2 der Entropie und deren letztere den Werthen T_2 und T_1 der absoluten Temperaturen als Grenztemperaturen entsprechen mögen. Hieraus ist ersichtlich, dass der Weg des untersuchten Kreisprocesses nur für einen Moment zur oberen Grenztemperatur T_2 sich erhebt und abermals nur für einen Moment die untere Grenztemperatur T_1 erreicht. Die Temperatur wächst also auf dem Wege *dab* und sinkt auf dem Wege *bcd*. Andererseits erhellet, dass auf dem Wege *abc* Wärmeaufnahme, auf dem Wege *cda* Wärmeabgabe stattfindet. Wir wollen die auf dem ersteren Wege (*abc*) aufgenommene Wärmemenge Q_2 heissen und erwägen, dass die Temperaturen, bei welchen die einzelnen Elemente dQ dieser Wärmemenge aufgenommen werden, den Moment der Berührung in *b* ausgenommen, sämmtlich unter der oberen

*) Vergleiche Charles Briot, mechanische Wärmetheorie.

Grenztemperatur T_2 gelegen sind, wesshalb $\int\limits_{abc}\frac{dQ}{T}$ grösser sein muss als die Entropie $\frac{Q_2}{T_2}$, welche der Aufnahme derselben Wärmemenge Q_2 im Carnot'schen Kreisprocesse entsprechen würde. Ebenso einleuchtend ist, dass die einzelnen Elemente dQ der Wärmemenge Q_1, welche auf dem Wege cda abgegeben werden, den Moment der Berührung in d ausgenommen, sämmtlich bei höheren Temperaturen als der unteren Grenztemperatur T_1 abgegeben werden, wesshalb der numerische Werth der negativen Entropie $\int\limits_{cda}\frac{dQ}{T}$ kleiner sein muss als der entsprechende $\frac{Q_1}{T_1}$ für den Carnot'schen Process.

Schreiben wir diese Beziehungen $\int\limits_{abc}\frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2}$ und $\int\limits_{cda}\frac{dQ}{T} < \frac{Q_1}{T_1}$ in der Form: $\int\limits_{abc}\frac{dQ}{T} - \int\limits_{cda}\frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$ und erwägen wir, dass der Ausdruck links vom Ungleichheitszeichen als Gesammtentropie des untersuchten Kreisprocesses $= 0$ sein muss, so finden wir $0 > \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$ d. i. $\frac{Q_1}{T_1} > \frac{Q_2}{T_2}$ oder $\frac{Q_1}{Q_2} > \frac{T_1}{T_2}$, somit auch $1 - \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2}$; folglich $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Wir ersehen hieraus, dass der ökonomische Effect des untersuchten Kreisprocesses und somit, wie sich eben so leicht zeigen lässt, der ökonomische Effect eines jeden Kreisprocesses, der eben kein Carnot'scher ist, kleiner ausfällt als der bei einem Carnot'schen Kreisprocesse erzielte, welcher sich demnach als der vortheilhafteste darstellt. Es ergibt sich hieraus ein zweiter leitender Grundsatz für die Beurtheilung der Leistungen thermodynamischer Maschinen, nämlich die Regel, den Gang solcher Maschinen mit dem eines Carnot'schen Kreisprocesses möglichst in Einklang zu bringen.

(**Dämpfe.**) Die Molecüle einer Flüssigkeit haben ohne Zweifel sehr verschiedene Geschwindigkeiten. Bei der Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens gegen die Oberfläche hin kann unter günstigen Umständen leicht ein Losreissen des Theilchens von der Flüssigkeit stattfinden, in welchem Falle dieses Molecül eine geradlinige Bewegung im Raume über der Flüssigkeitsoberfläche einschlägt, von welchem wir annehmen

wollen, dass er ringsum geschlossen und vorderhand leer sei. Indem sich in der beschriebenen Weise immer mehr Flüssigkeitsmolecüle abtrennnen und in den Raum über der Flüssigkeit begeben, füllt sich derselbe mit einem Aggregate von Theilchen, welches wir Dampf*) nennen und welches einen Druck gegen die Gefässwände ausübt, der nach denselben Grundsätzen zu beurtheilen ist, die bei der Erklärung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes vorgetragen worden sind. Die abgetrennten Flüssigkeitsmolecüle prallen gegen die Wände des Gefässes sowie auch gegen einander und kehren wohl auch wieder zur Flüssigkeitsoberfläche zurück, um diese entweder neuerdings zu verlassen oder aber daselbst haften zu bleiben. Es wird sich schliesslich ein Gleichgewichtszustand herstellen, sobald sich der Austausch der Flüssigkeitstheilchen in der Art abgeglichen hat, dass in einer gewissen Zeit ebensoviele Flüssigkeitstheilchen zur Oberfläche zurückkehren als von derselben ausgehen. Diese Anzahl wird für die Dichte des gebildeten Dampfes massgebend sein und, wie leicht einzusehen ist, bedingt durch die mittlere Geschwindigkeit der Molecüle, somit durch die Temperatur. Da gerade die am schnellsten sich bewegenden Flüssigkeitsmolecüle vorzugsweise diejenigen sein werden, die sich von der Flüssigkeitsoberfläche losreissen, wird für die Flüssigkeit die mittlere lebendige Kraft der Molecüle geringer werden müssen, d. h. die Flüssigkeit wird abgekühlt und muss Wärme zugeführt erhalten, wenn sie bei gleicher Temperatur bleiben soll. Diese ist die sogenannte latente Verdampfungswärme.

Befindet sich in dem Raume über der Flüssigkeit ein Gas, so ändert dies an dem beschriebenen Vorgange nichts, als dass sich derselbe langsamer vollzieht.

Dies ist in den Grundzügen die von Clausius gegebene Erklärung der Dampfbildung. Sobald sich der vorhin erwähnte stationäre Zustand eingestellt hat, nennen wir den Dampf gesättigt. Er hat dann das Maximum der Dichte, welches er bei der herrschenden Temperatur überhaupt zu erreichen vermag und äussert das dieser Temperatur entsprechende Maximum des Druckes, welcher Druck, so lange der Dampf mit der

*) Dampf heisst überhaupt eine aus einer Flüssigkeit entwickelte und wieder in den flüssigen Zustand zurückführbare Gasart.

Flüssigkeit, aus welcher er entstanden ist, in Berührung steht, wie bekannte Versuche gelehrt haben und auch die vorstehende Erklärung der Dampfbildung leicht einsehen lässt, einzig und allein durch die herrschende Temperatur bestimmt wird.

Wir können demnach den Druck p des gesättigten Dampfes als eine Function der Temperatur t allein ansehen und den Sättigungszustand des Dampfes durch die Beziehung kennzeichnen

$$p = f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 246)$$

somit auch

$$t = F(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 247)$$

Es ist nämlich auch umgekehrt die Temperatur eine Function des Druckes allein; die später erwähnte Regnault'sche Formel ist der empirische Ausdruck dieser Relationen. Vergrössert man den Raum über der Flüssigkeit, so wird eine neue Dampfbildung stattfinden, d. h. ein weiterer Antheil der Flüssigkeit in Dampfform übergehen, während eine Verkleinerung jenes Raumes eine Rückbildung eines Theiles des vorhandenen Dampfes in Flüssigkeit zur Folge hat. In beiden Fällen aber wird, wenn man durch geeignete Wärmezu- oder -ableitung (wovon später das Nähere gesagt werden soll) die ursprüngliche Temperatur constant erhält, auch derselbe Druck fortbestehen.

Ist dagegen ein Dampf von der Flüssigkeit, aus welcher er entstanden ist, getrennt, so bewirkt eine Volumsvergrösserung bei constanter Temperatur eine Abnahme des Druckes; der Dampf besitzt sodann einen Druck, welcher, wenn der Dampf gesättigt wäre, einer niedrigeren Temperatur entsprechen würde. Er hat also eine Temperatur, welche höher ist als diejenige, bei welcher im gesättigten Zustande der vorhandene Druck herrscht und wird desshalb überhitzter Dampf genannt. Sein Druck ist nicht mehr Function der Temperatur allein, sondern auch des Volumens, wodurch der eintretende Gaszustand im Gegensatze zu dem eines gesättigten Dampfes charakterisirt wird. Wir werden später den Begriff des überhitzten Dampfes noch genauer feststellen und erinnern einstweilen nur noch an die bekannte Thatsache, dass Dämpfe, je mehr sie sich vom gesättigten Zustande entfernen, also je mehr sie überhitzt sind, in ihrem Verhalten den Gasen näher

kommen, die wir denn auch in der That als überhitzte Dämpfe ansehen können. Insbesondere sind die coërciblen Gase, wenn wir sie als überhitzte Dämpfe betrachten, solche, die dem Sättigungszustande bereits näher stehen als die sogenannten permanenten Gase, diejenigen nämlich, bei welchen eine Condensation bis jetzt noch nicht gelungen ist.

(**Specifisches Volumen trockener gesättigter Dämpfe; äussere latente Wärme.**) Wir werden im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt wird, ein für alle Mal voraussetzen, dass von trockenen*) gesättigten Dämpfen die Rede sei. Als Ausgangspunkt der weiteren Entwickelungen über die Gesetzmässigkeiten der Dampfbildung diene uns die Betrachtung des folgenden Vorganges.

Wir denken uns ein cylindrisches Gefäss (Fig. 113) vom Querschnitte eines Quadratmeters, den wir als Flächeneinheit annehmen. Auf dem Boden des Cylinders befinde sich ein Kilo Wasser und auf demselben laste ein Kolben *K* mit dem Drucke *p*, von welchem wir zunächst annehmen, dass er dem Drucke der Atmosphäre, = 10334 Kilo pro Quadratmeter gleichkomme. Das Wasser habe ursprünglich die Temperatur $0^0 C$ und werde allmählich erwärmt. Bei einer gewissen von dem Drucke *p* abhängigen Temperatur wird das Wasser sieden und verdampfen, indem es den Kolben emporhebt. Bei dem angenommenen Drucke einer Atmosphäre wird $100^0 C$ diese Temperatur sein und somit auch die Temperatur des Dampfes, der sich bildet. Dieser Dampf wird, sobald alles Wasser in Dampf übergegangen ist, den Kolben bis zu einer gewissen Höhe *s* emporgehoben haben, welche nunmehr, da der Querschnitt des Cylinders gleich 1 ist, zugleich das Volumen angibt, welches der unter dem Drucke *p* entwickelte gesättigte und trockene Dampf vom Gewichte eines Kilogramms einnimmt. Findet die Verdampfung unter dem

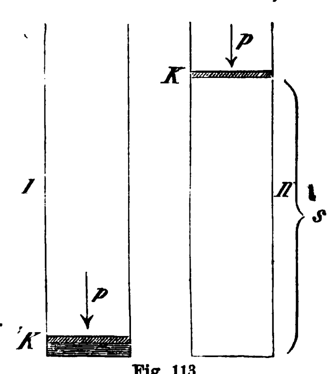


Fig. 113.

*) Der Dampf heisst trocken, wenn er keine condensirten Wassertheilchen mit sich führt, was z. B. bei Wolken- und Nebelbildung eintritt.

Drucke einer Atmosphäre, also bei der Temperatur von 100° statt, so wird $s = 1{,}65$, d. h. der gesättigte und trockene Dampf, der aus 1 Kilo Wasser entstanden ist, und somit selbst das Gewicht von 1 Kilo hat, erfüllt einen Raum s von 1,65 Kubikmetern. Wir setzen dabei voraus, dass die Wärmezufuhr in dem Momente unterbrochen werde, wo sich das letzte Flüssigkeitsquantum in Dampf aufgelöst hat, damit der Dampf den gesättigten Zustand nicht überschreite, das heisst nicht überhitzt werde.

Hätten wir den Versuch bei einem Drucke von zwei Atmosphären vorgenommen, d. h. den Kolben K mit $p = 2 \times 10334$ Kilo belastet, so wäre die Siedetemperatur auf nahezu 121° gestiegen; wir hätten aber dabei aus 1 Kilo Wasser nur 0,86 Kubikmeter Dampf erhalten, d. h. der Kolben K wäre nur bis zu einer Höhe $s = 0{,}86^m$ gehoben worden.

Unter einem Drucke von drei Atmosphären ($p = 3 \times 10334$) wäre die Siedetemperatur 134° geworden, und das Volumen von 1 Kilo gesättigten Wasserdampfes $s = 0{,}59$ Kubikmeter.

Wir sehen hieraus, dass das Volumen s der Gewichtseinheit (1 Kilo) gesättigten Dampfes mit steigender Siedetemperatur und somit zunehmendem Drucke abnimmt. Wir nennen dieses Volumen das specifische Volumen des gesättigten trockenen Dampfes. Es ist ein Minimum im Vergleiche mit überhitztem Dampfe von gleicher Temperatur. — Dagegen nennen wir das Volumen σ des Kilogramms Flüssigkeit, aus welchem sich der Dampf gebildet hat, das specifische Volumen der Flüssigkeit. Die Differenz beider Volumina $u = s - \sigma$ stellt bei unserem Cylinder vom Querschnitte 1 offenbar die Hubhöhe des Kolbens K vor. — Da derselbe mit einem Drucke p auf dem Dampfe lastete, musste bei seiner Hebung offenbar die Arbeit pu verrichtet werden. Diese Arbeit ist einer Wärmemenge vom Betrage Apu äquivalent, die der verdampfenden Flüssigkeit zugeführt werden musste und äussere latente Wärme des Dampfes genannt wird, da sie nicht zu einer Temperaturerhöhung, sondern zu einer Arbeitsverrichtung und zwar zu äusserer Arbeit verwendet worden ist.

(**Innere latente Wärme.**) Eine andere Wärmemenge q ist im Allgemeinen erforderlich, um die Flüssigkeit von der angenommenen ursprünglichen Temperatur von 0° C auf die betreffende Verdampfungstemperatur t zu erwärmen. Man nennt

sie die Flüssigkeitswärme. Für Wasser beträgt (nach Regnault) die zur Erwärmung von 0^0 auf $t^0\,C$ erforderliche Wärmemenge

$$q = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3 \quad . \; . \; . \quad 248)$$

während eine Gesammtwärme vom Betrage

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 249)$$

erforderlich ist, um 1 Kilo Wasser von der Temperatur 0^0 in 1 Kilo gesättigten Dampfes von der Temperatur t^0 überzuführen, wobei eben t die vom herrschenden Drucke abhängige Verdampfungstemperatur vorstellt.

Zieht man von dieser Gesammtwärme die Flüssigkeitswärme q ab, so erhält man die eigentliche Verdampfungswärme vom Betrage

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 \quad . \quad 250)$$

Da dieselbe zum Theil zur Verrichtung der oben erwähnten äusseren Arbeit pu dient, so entfällt nur der Betrag

$$\varrho = r - Apu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 251)$$

als sogenannte innere latente Wärme auf die Vermehrung der Energie, welche die Flüssigkeitstheilchen erfahren müssen, um von einander getrennt und in Dampf aufgelöst zu werden. Für ϱ gilt nach Zeuner die Formel

$$\varrho = 575{,}4 - 0{,}791\,t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 252)$$

während sich für Apu nach später zu erläuternden Principien

$$Apu = 31{,}1 + 0{,}096\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 \quad . \quad 253)$$

ergibt.

Die Flüssigkeitswärme q und die innere latente Wärme ϱ zusammengenommen stellen offenbar die Wärme vor, welche 1 Kilo Dampf von der Temperatur t^0 mehr in sich hat, als 1 Kilo Wasser von der Temperatur 0^0. Zeuner hat daher diese Wärmemenge

$$J = q + \varrho = 575{,}4 + 0{,}209\,t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3 \quad . \quad 254)$$

als sogenannte Dampfwärme besonders bezeichnet.

(**Druck und Temperatur; Regnault's Formel.**) Diesen Formeln möge noch die Regnault'sche Interpolationsformel

angereiht werden, welche die Beziehung zwischen Druck und Temperatur gesättigter Dämpfe darstellt. Sie lautet:

$$\log p = a + b\alpha^\tau + c\beta^\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 255)$$

Dabei sind a, b, c, α und β constante Zahlen, zu deren Bestimmung fünf Versuche erforderlich sind bei verschiedenen Temperaturen. Bezeichnen wir mit t_0 die niedrigste dieser Temperaturen, so ist $\tau = t - t_0$, wenn wir unter t die Temperatur verstehen, für welche p berechnet werden soll. Schreiben wir statt $\log p$, indem wir die natürlichen Logarithmen einführen, $m\,\mathrm{l}(p)$, so erhalten wir

$$\mathrm{l}(p) = \frac{1}{m}(a + b\alpha^\tau + c\beta^\tau) = M(a + b\alpha^\tau + c\beta^\tau),$$

wobei bekanntlich $m = \log.e = 0{,}434 \ldots.$ und $M = \frac{1}{m} = \mathrm{l}(10) = 2{,}30 \ldots$ ist. Durch Differentiation ergibt sich zuvörderst $\frac{dp}{p} = M(b\,\mathrm{l}(\alpha)\alpha^\tau + c\,\mathrm{l}(\beta)\beta^\tau)dt$, (weil nämlich $\tau = t - t_0$). Es ist demnach $\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = M(b\,\mathrm{l}(\alpha)\alpha^\tau + c\,\mathrm{l}(\beta)\beta^\tau)$, was man in der Form

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = A\alpha^\tau + B\beta^\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 256)$$

schreiben kann. Es gibt Tabellen, welche $\log A\alpha^\tau$ und $\log B\beta^\tau$ als Functionen von t für gewisse Dämpfe, insbesondere Wasserdämpfe, entnehmen lassen und in solcher Weise die Bestimmung von $\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$ vermitteln.

Es ist bemerkenswerth, dass eine annähernde Bestimmung von $\frac{dp}{dt}$ auch durch die Formel

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p_2 - p_1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 257)$$

geschehen kann, wobei p_2 den Druck für die Temperatur $(t + 1)^0\,C$ und p_1 den Druck für die Temperatur $(t - 1)^0\,C$ bedeutet, und man demnach nur diese Drucke für die benachbarten Temperaturen aus einer Dampfspannungstabelle zu entnehmen braucht, um den Differentialquotienten des Druckes für die betreffende Temperatur selbst zu erhalten (Röntgen, Bd. II., S. 43.)

Für Wasserdämpfe von $t = 0$ bis $t = 100$ fand Zeuner

aus Regnault's Formel den nachstehend mit Einschränkung auf fünf Decimalen angeführten Werth

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = \text{num.log.}(-1{,}14869 - 0{,}00327\,t) \\ \qquad + \text{num.log.}(-3{,}30694 + 0{,}00686\,t) \\ \text{und für } t = 100 \text{ bis } t = 200 \text{ ebenso} \\ \frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = \text{num.log.}(-1{,}39716 - 0{,}00166\,t) \\ \qquad + \text{num.log.}(-1{,}48024 - 0{,}00595\,t) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 258)$$

Diese Werthe sind unabhängig von der Einheit der p. Eben diese Formeln geben nun auch die Werthe für $\frac{dp}{dt}$ selbst an die Hand, indem ja p und folglich auch $\frac{1}{p}$ für jeden Werth von t aus den Dampfspannungstabellen zu entnehmen ist. Eben dieser Differentialquotient $\frac{dp}{dt}$ ist es nun, den wir in den nächstfolgenden Entwickelungen häufig benöthigen werden, wesshalb wir die Mittel zur Bestimmung desselben vorausgeschickt haben. Die Regnault'sche Formel ist der empirische Ausdruck für $p = f(t)$, welche Relation, wie gesagt, nur bei gesättigten Dämpfen stattfindet, im Gegensatze zu $p = f(t, v)$ bei Gasen.

(**Clapeyron-Clausius'sche Gleichung.**) Die Thomson'sche Gleichung 236, nämlich $l = AT\frac{dp}{dt}$ führt in Verbindung mit der allgemeinen Gleichung 198, nämlich $dQ = c\,dt + l\,dv$ zur Gleichung $dQ = c\,dt + AT\frac{dp}{dt}dv$, von der wir schon bei einer früheren Gelegenheit bemerkt haben, dass sie für die Untersuchung der Aenderung der Aggregationszustände von grosser Wichtigkeit ist. Die Betrachtungen, welche wir für den Fall durchgeführt haben, dass es sich um den Vorgang der Schmelzung handelt (siehe die Ableitung der Formel 243), lassen sich in ganz ähnlicher Weise auf die Verdampfung anwenden. Wir haben in diesem Falle $t =$ Const., folglich $c\,dt = 0$ zu setzen und erhalten demnach $dQ = AT\frac{dp}{dt}dv$. Wir wollen annehmen, dass von der Gewichtseinheit des Körpers, welcher die Aenderung des Aggregationszustandes erfährt, das Gewicht x bereits in Dampfform, das Gewicht $1 - x$ aber noch im flüssigen Zu-

stande vorhanden sei. Ist nun s das specifische Volumen des Dampfes und σ jenes der Flüssigkeit, so ist das Gesammtvolumen v offenbar gleich

$$xs + (1 - x)\sigma = x(s - \sigma) + \sigma = ux + \sigma,$$

wenn wir $s - \sigma = u$ setzen. Da nun u eine Function der Temperatur allein ist und daher bei constanter Temperatur constant bleibt, so gibt die Differentiation, welche einer Wärmezufuhr dQ entspricht, $dv = udx$, indem σ constant ist. Wir erhalten demnach $dQ = AT\frac{dp}{dt}udx$, folglich

$$\frac{dQ}{dx} = AT\frac{dp}{dt} \cdot u \quad \ldots \ldots \ldots \quad 259)$$

Diese Grösse stellt die auf die Gewichtseinheit reducirte Verdampfungswärme vor, die wir mit r bezeichnen wollen, wodurch wir weiter zur Relation

$$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 260)$$

geführt werden, welche eben die an citirter Stelle bereits besprochene Clapeyron-Clausius'sche Gleichung in ihrer Anwendung auf Dämpfe darstellt.

(**Gesetze von Despretz und Zeuner.**) Berechnet man nun mit Hilfe der auf dem bereits angegebenen Wege zu findenden Werthe von $\frac{dp}{dt}$ die Werthe von $\frac{r}{u}$ für verschiedene Flüssigkeiten, jedoch bei gleichem Drucke p, so zeigen dieselben eine auffallende Uebereinstimmung. Diese geht zwar nicht so weit, dass wir berechtigt wären, geradezu $\frac{r}{u} = f(p)$ anzunehmen, d. h. das Verhältniss $\frac{r}{u}$ als lediglich vom Drucke abhängig zu betrachten, ist aber immerhin von der Art, dass wir dasselbe für verschiedene Flüssigkeiten bei gleichem Drucke als mit einiger Annäherung constant bezeichnen können. Dasselbe gilt, insofern wir σ im Vergleiche mit s vernachlässigen dürfen, für das Verhältniss $\frac{r}{s}$ und somit auch für das Product rd, wenn wir die Dampfdichte $d = \frac{1}{s}$ einführen. In dieser Form, nämlich

$$rd \doteq \text{Const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 261)^*)$$

*) Mit $\doteq$ bezeichnen wir eine annähernde Gleichheit.

stimmt die Relation $\frac{r}{u} \doteq$ Const. mit dem Satze von Despretz überein, welcher dahin lautet, dass die Verdampfungswärmen verschiedener Flüssigkeiten bei gleichem Drucke den Dampfdichten annähernd verkehrt proportional sind.

Erwägt man ferner, dass $\varrho = r - Apu$ ist (Formel 251) somit $\frac{\varrho}{u} = \frac{r}{u} - Ap$, so erkennt man sofort, dass bei gleichem Drucke auch $\frac{\varrho}{u}$, und, insofern wir mit gleichem Rechte wie oben s statt u schreiben, das Verhältniss $\frac{\varrho}{s}$ für verschiedene Flüssigkeiten bei gleichem Drucke annähernd constant ist. Diese Folgerung, dass nämlich ebensowohl

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{s} \doteq \text{Const.} \\ \text{als auch} \quad &\\ &\frac{\varrho}{s} \doteq \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 262)$$

lässt sich nach Zeuner dahin formuliren, dass bei gleichem Drucke gleichen Rauminhalten (s) der Dämpfe verschiedener Flüssigkeiten sowohl gleiche Verdampfungswärmen (r) als auch gleiche innere Wärmen (ϱ) entsprechen.

(**Dampfdichte.**) Eine andere Anwendung der Clapeyron-Clausius'schen Gleichung führt zur Bestimmung der Dampfdichte $d = \frac{1}{u + \sigma} = \frac{1}{s}$ mittelst der aus 260 unmittelbar folgenden Relation $u = \frac{r}{AT\frac{dp}{dt}}$, folglich

$$s = u + \sigma = \frac{r}{AT\frac{dp}{dt}} + \sigma \quad \ldots \ldots \quad 263)$$

Die so bestimmten Werthe der Dichte des Wasserdampfes kommen den von Taite und Fairbairn beobachteten viel näher als jene, die man mit Hilfe des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes erhält, unter der von Gay-Lussac gemachten Annahme eines constanten Dichteverhältnisses (0,622) zwischen Dampf und Luft bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur.

Setzt man das Gewicht der Volumseinheit des Dampfes

$\frac{1}{s} = d$ und für atmosphärische Luft $\frac{1}{s'} = d'$, so wäre nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze $pv = RT$, worin ja v bekanntlich das Volumen der Gewichtseinheit bedeutet und daher mit $s' = \frac{1}{d'}$ identisch ist, $\frac{p}{d'} = RT$ und somit $d' = \frac{p}{RT}$. Macht man nun in der That die oben erwähnte Annahme eines constanten Verhältnisses der Dichten von Wasserdampf und Luft bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur, nämlich

$$\frac{d}{d'} = 0{,}622 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 264)$$

so ergibt sich $d = 0{,}622 \frac{p}{RT} = 0{,}622 \cdot \frac{p}{\frac{p_0 v_0}{T_0} \cdot T}$ (Formel 123),

wobei wieder v_0 das specifische Volumen $s_0' = \frac{1}{d_0'}$ der Luft und zwar beim Normaldrucke einer Atmosphäre und der Normaltemperatur $0^0\,C$ bedeutet, wodurch wir erhalten

$$d = \frac{0{,}622\, T_0\, d_0'}{p_0} \cdot \frac{p}{T}$$

und mit Rücksicht auf die bekannten Zahlenwerthe $d_0' = 1{,}293$ (Gewicht der Volumseinheit), $T_0 = 273$, $p_0 = 760$, (wenn wir uns vorbehalten, die Werthe von p in Millimetern Quecksilberdruck einzusetzen) und endlich $T = 273 + t$,

$$d = \frac{0{,}622 \,.\, 273 \,.\, 1{,}293}{760} \cdot \frac{p}{273 + t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 265)$$

welche Formel die Dampfdichte d als Gewicht der Volumseinheit in Kilo pro Kubikmeter ausdrückt, indem der eingesetzte Werth 1,293 das Gewicht eines Kubikmeters Luft in Kilo angibt.

(**Zeuner's Formel.**) Zur Bestimmung der Dampfdichte dient übrigens sehr genau die empirische Formel von Zeuner:

$$\left.\begin{aligned} p\, s^{1,0646} &= p(u + \sigma)^{1,0646} = 1{,}704 \\ \text{oder} \quad \frac{1}{s} &= d = 0{,}6061\, p^{0,9393} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 266)$$

Die Curve $ps^{1,0646} = 1{,}704$ (wenn wir die s als Abscissen und die p als Ordinaten betrachten), heisst die Curve constanter Dampfmenge, weil die in der vorstehenden Gleichung ausgedrückte Beziehung unter der Voraussetzung Geltung hat,

dass eine und dieselbe Dampfmenge (Gewichtseinheit) und zwar stets in gesättigtem und trockenem Zustande erhalten, auf die verschiedenen Werthe von p (beziehungsweise t) gebracht werde, welchen die aus der Zeuner'schen Formel sich ergebenden Werthe von s entsprechen.

(**Berechnung der äusseren latenten Wärme.**) Eine dritte, für die Lehre von den Dämpfen wichtige Anwendung findet die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung zur Bestimmung des Werthes Apu, der Wärmemenge nämlich, welche der bei Verdampfung der Gewichtseinheit verrichteten äusseren Arbeit pu äquivalent ist. Diese Wärmemenge haben wir äussere latente Wärme genannt; man erhält ihren Werth aus der Relation 260, indem man zunächst $Au = \frac{r}{T} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dt}}$ setzt und dann beiderseits mit p multiplicirt, in folgender Form:

$$Apu = \frac{r}{T} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dp}{p\,dt}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 267)$$

Diese Formel führt mit Hilfe der Regnault'schen Tabellen zu $Apu = f(t)$, d. h. zur Kenntniss des Werthes von Apu als Function der Temperatur. (Für Wasser ist annähernd $Apu = 31{,}1 + 0{,}1\,t$, also verhältnissmässig sehr klein im Vergleiche mit der Gesammtwärme $\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,t$.)

(**Specifische Wärme.**) Wir denken uns in einem geschlossenen Raume ein Kilo Mischung von x Gewichtstheilen Dampf und $1 - x$ Gewichtstheilen Wasser um dt erwärmt, wobei also auch der Druck zunimmt, so wird die dabei erforderliche Wärmezufuhr sich in der Art vertheilen, dass $(1 - x)m\,dt$ zur Erwärmung des Wassers, $xm'\,dt$ zur Erwärmung des Dampfes und $r\,dx$ zur gleichzeitig eintretenden Neubildung von Dampf aus dx Gewichtstheilen Wasser dienen, wobei wir m als die specifische Wärme der Flüssigkeit ansehen, während m' eine sogleich näher zu betrachtende specifische Wärme des Dampfes ist. Denken wir uns z. B., es sei x gerade $= 1$, so wird sich die vorhin erwähnte Wärmezufuhr

$$dQ = (1 - x)m\,dt + xm'\,dt + r\,dx \quad . \quad . \quad . \quad 268)$$

reduciren auf $dQ = m'\,dt$, indem unter der soeben gemachten Voraussetzung kein Wasser mehr vorhanden ist, welches erwärmt und beziehungsweise in Dampf verwandelt werden

könnte. Die Gewichtseinheit Dampf wird alsdann die gesammte Wärmezufuhr dQ in sich aufnehmen, wobei wir voraussetzen, dass wir durch entsprechende Regulirung des Druckes den Dampf im gesättigten und trockenen Zustande erhalten. Wir können demnach m' (nach Clausius) die specifische Wärme bei constanter Dampfmenge nennen.

Die Gleichung 268 lässt sich auch in der Form schreiben:

$$dQ = [m + x(m' - m)]dt + r\,dx \quad . \quad . \quad . \quad 269)$$

Da nun nach dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differentiale ist, so muss die Gleichung $\frac{dQ}{T} = \frac{[m + x(m' - m)]}{T}\, dt + \frac{r}{T}\, dx$ integrabel sein und somit die Bedingungsgleichung bestehen:

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{T}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left[\frac{m + x(m' - m)}{T}\right]}{\partial x}.$$

Die Ausführung der Differentiation gibt mit Rücksicht auf $\frac{\partial T}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial x} = 0$ (weil ja eben t und x die beiden unabhängigen Veränderlichen sind und m nur von t abhängt), und nach Abkürzung mit T^2 den Ausdruck

$$\frac{dr}{dt}\, T - r = (m' - m)\, T^{*}), \text{ somit}$$

$$m' = m + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 270)$$

Eine noch etwas einfachere Formel für die specifische Wärme m' erhalten wir durch Einführung von $\lambda - q$ statt r; man erhält nämlich auf diese Art $m' = m + \frac{d\lambda}{dt} - \frac{dq}{dt} - \frac{r}{T}$, und wenn man erwägt, dass $m = \frac{dq}{dt}$

$$m' = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{r}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 271)$$

Die Werthe von m' fallen für verschiedene Flüssigkeiten theils positiv, theils negativ aus, doch wachsen sie stets mit der Temperatur, so dass sie endlich bei allen Flüssigkeiten für eine gewisse Temperatur positiv werden müssen. Man findet nach Clausius für Wasser und für Aether

*) Man beachte, dass r eine Function von t allein ist.

Wasser:		Aether:	
t	m'	t	m'
58,21°,	— 1,398	0°,	+ 0,116
92,66 ,	— 1,266	40°,	+ 0,120
117,17 ,	— 1,107	80°,	+ 0,128
144,74 ,	— 0,807	120°,	+ 0,133

(**Verhalten bei der Expansion und Compression.**) Ueberlässt man trockenen gesättigten Wasserdampf der Expansion, wobei der Druck, somit auch die Temperatur abnimmt, dt also negativ ist, so erfordert dies, wegen des ebenfalls negativen m' ein positives $dQ = m'dt$; dies alles unter der Voraussetzung, dass das ganze Quantum Dampf gesättigt und trocken bleiben soll. Findet die Expansion adiabatisch, also ohne Wärmezufuhr statt, so bleibt der Dampf erfahrungsmässig zwar auch gesättigt, aber nicht trocken, er muss eben dabei eine theilweise Condensation erleiden, und es bleibt insofern die Dampfmenge nicht constant. Bei der Compression dagegen muss, wie ebenso einleuchtend ist, Wärmeableitung stattfinden; eine adiabatische Compression würde nämlich Ueberhitzung bedingen.

Man kann das Gesagte auch auf folgende Art erläutern: In der Gleichung $dQ = m'dt$, welche für constante Dampfmenge Geltung hat, lässt sich für dt auch einsetzen $\frac{dt}{ds} \cdot ds$, da s eine Function von t allein ist. Man erhält durch diese Substitution die Gleichung $dQ = \frac{m'}{\frac{ds}{dt}} \cdot ds$. Nun wissen wir, dass das specifische Dampfvolum s bei steigender Temperatur t abnimmt (es ist ja für Wasser bekanntlich $s = 1{,}65$ bei 100°, $s = 0{,}86$ bei 121° u. s. w.), wesshalb $\frac{ds}{dt}$ negativ ist. Wenn nun, wie z. B. beim Wasser, auch m' negativ ist, so ist der Coëfficient von ds in der vorstehenden Gleichung wesentlich positiv, somit dQ positiv, wenn s wächst, negativ, wenn s abnimmt. Das heisst mit anderen Worten: es muss bei der Expansion Wärme zugeleitet werden, wenn der Dampf trocken bleiben, beziehungsweise constante Dampfmenge erhalten werden soll, und ebenso bei der Compression Wärme abgeleitet werden, da im entgegengesetzten Falle Ueberhitzung eintreten, der Dampf also nicht gesättigt bleiben würde. Beim Aether, welchem ein positives m' entspricht, findet das Umgekehrte statt.

(Grenzcurve.) Hieraus ergibt sich noch eine weitere bemerkenswerthe Folgerung: Wenn uv (Fig. 114) die Curve constanter Dampfmenge, man nennt sie auch Grenzcurve, $ps^{1,0646} = 1,704$ vorstellt, indem wir uns die s als Abscissen, die p als Ordinaten denken und wie immer die Gewichtseinheit Dampf im gesättigten und trockenen Zustande voraussetzen, während AB die adiabatische Curve darstellt, so ist klar, dass die letztere die erstere schneiden muss und zwar so, dass der untere

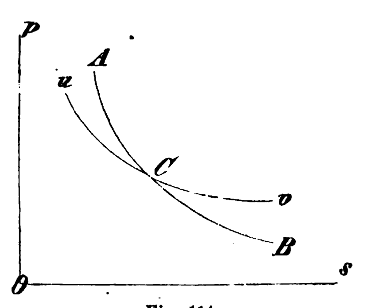


Fig. 114.

Theil CB unterhalb, der obere CA oberhalb der Grenzcurve liegt, wenn die betreffende Flüssigkeit, wie z. B. Wasser, ein negatives m' hat. Geht man nämlich von irgend einem dem Punkte C entsprechenden Zustande, d. h. dem Punkte C entsprechenden Werthen von p und s aus, indem man eine adiabatische Expansion vollzieht, so wird dabei nach dem vorhin Gesagten eine theilweise Condensation des Dampfes erfolgen, während im Falle einer adiabatischen Compression Ueberhitzung eintritt. Beim überhitzten Dampfe entspricht einem gewissen Werthe von s ein grösseres p als nach der Grenzcurve für den gesättigten Dampf sich ergibt, ein p nämlich, für welches dem gesättigten Dampfe ein kleineres s zukommt, wesshalb eben AC über der Grenzcurve liegen muss und somit BC unter derselben. Das Entgegengesetzte würde beim Aetherdampfe zutreffen. Hirn hat diese theoretischen Folgerungen experimentell bestätigt.

(Gleichungen von Clausius und W. Thomson.) Wir sind oben (Formel 270) auf den Ausdruck geführt worden $m' = m + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$. Diese Gleichung führt in Verbindung mit dem Clapeyron-Clausius'schen Satze: $\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}$ (Formel 260) oder $\frac{r}{T} = Au\frac{dp}{dt}$ zu neuen Relationen, die wir schliesslich noch erwähnen wollen, da sie in der neueren Theorie der Dampfmaschinen eine sehr häufige Verwendung finden. Durch Substitution des letzteren Werthes für $\frac{r}{T}$ erhalten wir nämlich

$$\left.\begin{aligned} m' &= m + \frac{dr}{dt} - Au\frac{dp}{dt} \\ \text{oder} \quad m - m' + \frac{dr}{dt} &= Au\frac{dp}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 272)$$

eine von Clausius herrührende Gleichung.

Andererseits haben wir oben dargethan (bei Erörterung der Formel 269), dass $\frac{\partial\left(\frac{r}{T}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left[\frac{m + x(m' - m)}{T}\right]}{\partial x}$, woraus $\frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dt} = \frac{m' - m}{T}$ folgt (wenn wir nämlich erwägen, dass m' und m sowie r als Functionen von t allein, sowie t selbst von x unabhängig sind). Gehen wir daher auf Gleichung 269 zurück und machen wir sie durch Einführung des integrirenden Divisors T integrabel, wodurch wir erhalten

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m}{T} \cdot dt + \frac{(m' - m)x}{T} dt + \frac{r}{T} dx \quad \ldots \quad 273)$$

so können wir in der so erhaltenen Gleichung für $\frac{m' - m}{T}$ den eben gefundenen Werth $\frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dt}$ einsetzen. Wir erhalten sodann nach leicht übersichtlichen Abkürzungen

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m}{T} dt + x\,d\left(\frac{r}{T}\right) + \frac{r}{T} dx = \frac{m}{T} dt + d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Die Integration dieser Gleichung führt zur Kenntniss des Werthes der Entropie $\mu = \int \frac{dQ}{T}$ in folgender Weise:

$$\mu = \frac{rx}{T} + \int \frac{m}{T} dt \quad \ldots\ldots \quad 274)$$

Diese Gleichung rührt von W. Thomson her.

Fünftes Hauptstück.

Grundzüge der Potentialtheorie.

Die Natur bietet uns zahlreiche Erscheinungen dar, welche man durch die Annahme von Kräften erklärt, die zwischen je zwei materiellen Theilchen im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Distanz wirksam sind. Die allgemeinen Lehrsätze, welche auf Kräfte dieser Art Bezug haben, bilden einen ziemlich ausgedehnten Zweig der mathematischen Physik, den man die Potentialtheorie nennt. Die besagten Kräfte gehören in die Kategorie der sogenannten Centralkräfte, unter welchen man solche versteht, deren Intensität irgend eine Function der Entfernung des afficirten Punktes vom Ausgangspunkte der wirksamen Kraft ist. Kräfte dieser Art sind durch die Eigenthümlichkeit charakterisirt, dass ihre den Coordinatenaxen parallelen Componenten in einer sehr einfachen Beziehung zu einander stehen, indem sie sich ihrem numerischen Betrage nach durch die ersten Differentialquotienten einer und derselben Function der Raumcoordinaten darstellen lassen. Diese Function der Raumcoordinaten hat man desshalb Kraftfunction (potential function) genannt. In dem speciellen Falle, wenn die Intensitäten der Centralkräfte dem Quadrate der Distanz verkehrt proportional sind, gestaltet sich die Kraftfunction sehr einfach und heisst dann Potentialfunction (im engeren Sinne) oder auch (nach Gauss) einfach Potential, obgleich man mit diesem letzteren Ausdrucke, wie später zur Sprache kommen wird, auch noch andere Begriffe zu bezeichnen pflegt.

Wenn man erwägt, dass in das Bereich der eben erwähnten Kräfte nicht nur die Wirkungen der Gravitation, welche dem Gesetze von Newton unterliegen, gehören, sondern auch die magnetischen und elektrischen Erscheinungen, welchen das ganz analoge Gesetz von Coulomb zu Grunde liegt, so lässt

sich die Wichtigkeit der Potentialtheorie für die Physik wohl ermessen.

(**Potentialfunction.**) Es soll nun sofort eingehender gezeigt werden, was man unter der Potentialfunction zu verstehen habe.

Wir denken uns (Fig. 115) ein System von festen Punkten, welche beispielsweise mit gewissen Elektricitätsmengen, μ_1, μ_2,

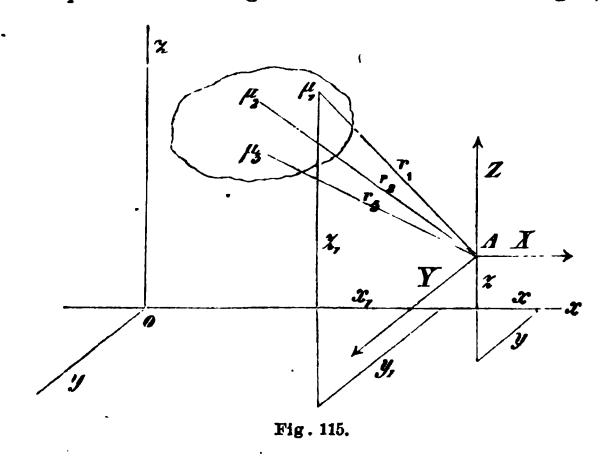


Fig. 115.

μ_3 u. s. f. behaftet sein mögen und auf ein in A befindliches gleichfalls elektrisches Theilchen, welches wir uns jedoch beweglich und mit der Quantität 1 begabt denken, einwirken. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Quantitäten μ positiv, die Quantität 1 in A jedoch negativ sei, so dass A von dem Punktsystem der μ angezogen wird und wollen sofort die den einzelnen Punkten entsprechenden Anziehungen in Betracht ziehen. Wir nennen die Abstände des Punktes A von μ_1, μ_2, μ_3 u. s. w. beziehungsweise r_1, r_2, r_3 u. s. w. und setzen voraus, dass jene Kraft als Einheit gelte, welche zwischen zwei Quantitätseinheiten in der Entfernung der Längeneinheit wirksam ist. Unter dieser Voraussetzung werden $\frac{\mu_1}{r_1^2}$, $\frac{\mu_2}{r_2^2}$ u. s. f. die von den einzelnen μ auf den Punkt A ausgeübten Anziehungen vorstellen. Wir denken uns nun diese einzelnen Anziehungskräfte in je drei Componenten zerlegt, welche den drei Coordinatenaxen parallel sind und beziehungsweise mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 u. s. w. parallel der x-Axe, ferner mit η_1, η_2, η_3 u. s. w. parallel der y-Axe, sowie ζ_1, ζ_2, ζ_3 u. s. w. parallel der z-Axe bezeichnet werden sollen. Sind α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche

r_1, ferner α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche r_2 u. s. w. beziehungsweise mit den Axen der x, y und z bilden, so ergeben sich sofort nachstehende Gleichungen:

$$\xi_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2} \cos\alpha_1, \quad \eta_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2} \cos\beta_1, \quad \zeta_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2} \cos\gamma_1; \quad \text{ebenso}$$

$$\xi_2 = \frac{\mu_2}{r_2^2} \cos\alpha_2, \quad \eta_2 = \frac{\mu_2}{r_2^2} \cos\beta_2, \quad \zeta_2 = \frac{\mu_2}{r_2^2} \cos\gamma_2 \text{ u. s. f.}$$

Setzen wir $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots = X$, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots = Y$, $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \cdots = Z$, so erhalten wir:

$$X = \left[\frac{\mu_1}{r_1^2} \cos\alpha_1 + \frac{\mu_2}{r_2^2} \cos\alpha_2 + \frac{\mu_3}{r_3^2} \cos\alpha_3 + \cdots\right]$$

$$Y = \left[\frac{\mu_1}{r_1^2} \cos\beta_1 + \frac{\mu_2}{r_2^2} \cos\beta_2 + \frac{\mu_3}{r_3^2} \cos\beta_3 + \cdots\right]$$

$$Z = \left[\frac{\mu_1}{r_1^2} \cos\gamma_1 + \frac{\mu_2}{r_2^2} \cos\gamma_2 + \frac{\mu_3}{r_3^2} \cos\gamma_3 + \cdots\right]$$

Dies gilt unter der steten Voraussetzung, dass sich im Punkte A eine negative Quantitätseinheit befindet. Man pflegt jedoch die Wirkung eines Agens in der Regel zunächst auf eine positive Quantitätseinheit bezogen in Betracht zu ziehen, und so wollen wir denn weiterhin auch diese Annahme machen, die mit Rücksicht auf die dadurch bedingte Umkehrung der Kraftcomponenten ξ, η und ζ darin ihren Ausdruck finden wird, dass wir in den vorstehenden Gleichungen für X, Y, Z, die dadurch zu negativen Grössen werden, rechts vom Gleichheitszeichen das Zeichen minus anbringen. Weiterhin wollen wir berücksichtigen, dass die Richtungscosinus der Entfernungen r_1, r_2, r_3 u. s. f. sich durch die Raumcoordinaten der betreffenden Punkte ausdrücken lassen, welche Raumcoordinaten für die festen Punkte μ_1, μ_2 u. s. w. beziehungsweise mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 u. s. w. bezeichnet sein mögen, für den beweglichen Punkt A jedoch einfach mit x, y und z.

Mit Benutzung dieser Bezeichnungen erhalten wir dann

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1 - x}{r_1}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{y_1 - y}{r_1}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{z_1 - z}{r_1}$$

und analoge Ausdrücke für die Richtungscosinus von r_2, r_3 u. s. w.

Durch Einsetzung dieser Werthe und Anbringung des vorhin erwähnten negativen Vorzeichens gestalten sich nunmehr unsere Gleichungen für die Kraftcomponenten in folgender Weise:

$$X = -\left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} + \mu_3 \frac{x_3 - x}{r_3^3} + \cdots\right]$$

$$Y = -\left[\mu_1 \frac{y_1 - y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y_2 - y}{r_2^3} + \mu_3 \frac{y_3 - y}{r_3^3} + \cdots\right]$$

$$Z = -\left[\mu_1 \frac{z_1 - z}{r_1^3} + \mu_2 \frac{z_2 - z}{r_2^3} + \mu_3 \frac{z_3 - z}{r_3^3} + \cdots\right]$$

Wir wollen diese Gleichungen, bevor wir in eine weitere Discussion derselben eingehen, durch eine symbolische Schreibweise bequemer gestalten, indem wir als allgemeines Zeichen eines Neigungswinkels gegenüber der x-Axe das α ohne Index und analog β und γ bezüglich der anderen Axen schreiben. Andererseits sollen die Coordinaten der festen Punkte μ im Allgemeinen durch x', y' und z' angedeutet werden, während wir die Entfernungen des Punktes A von den einzelnen μ im Allgemeinen mit r ohne Index und die μ selbst im Allgemeinen eben auch mit μ ohne Index darstellen. Wir können dann auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} X &= -\Sigma\mu\frac{x'-x}{r^3} \\ Y &= -\Sigma\mu\frac{y'-y}{r^3} \\ Z &= -\Sigma\mu\frac{z'-z}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 275)$$

Beachtet man nun, dass im Allgemeinen

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \\ \text{somit} \\ \frac{1}{r} &= [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 276)$$

so erkennt man in den Grössen $\frac{x'-x}{r^3}$, $\frac{y'-y}{r^3}$, $\frac{z'-z}{r^3}$ sofort die partiellen Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ beziehungsweise nach x, y und z. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}&=\frac{x'-x}{r^3}\\ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}&=\frac{y'-y}{r^3}\\ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}&=\frac{z'-z}{r^3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad 277)$$

Es ergeben sich demnach für die Kraftcomponenten folgende Ausdrücke:

$$X=-\Sigma\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x};\quad Y=-\Sigma\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y};\quad Z=-\Sigma\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}$$

oder wenn man erwägt, dass die Quantitäten μ von den Raumcoordinaten, auf welche sich die Differentiation bezieht, nicht abhängen,

$$X=-\Sigma\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial x};\quad Y=-\Sigma\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial y};\quad Z=-\Sigma\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial z}$$

oder endlich, da die Summe der Differentialquotienten gegebener Functionen gleich dem Differentialquotienten der Summe eben dieser Functionen ist,

$$\left.\begin{aligned}X&=-\frac{\partial\Sigma\frac{\mu}{r}}{\partial x}\\ Y&=-\frac{\partial\Sigma\frac{\mu}{r}}{\partial y}\\ Z&=-\frac{\partial\Sigma\frac{\mu}{r}}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad 278)$$

Diese Summe nun, wir wollen sie mit V bezeichnen, nämlich

$$\Sigma\frac{\mu}{r}=V\quad\ldots\ldots\quad 279)$$

deren negative Differentialquotienten, wie wir sehen, die Kraftcomponenten darstellen, nennen wir die Potentialfunction des Systemes der μ im Punkte A. Wenn das wirksame Agens nicht in einzelnen Punkten zerstreut vorhanden ist, sondern einen Raum stetig erfüllt, so werden wir denselben in Raumelemente dv zerlegen und die diesen Raumelementen entsprechenden Mengen $dq = k\,dv$ des Agens, wobei k dessen Dichte

vorstellt, in Betracht ziehen können. Das Potential stellt sich dann dar als die Summe aller $\frac{dq}{r}$, zu deren Kenntniss die über den ganzen betrachteten Raum auszudehnende Integration

$$\int \frac{dq}{r} = V \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 280)$$

hinführt, welcher Ausdruck den obigen $\Sigma \frac{\mu}{r} = V$ als speciellen Fall in sich schliesst.

Wäre das Agens von solcher Beschaffenheit, dass gleichartige Mengen desselben nicht abstossend, sondern anziehend auf einander einwirken, so würden die auf die Quantitätseinheit wirkenden Kraftcomponenten nicht durch die negativen, sondern durch die positiven Differentialquotienten des Potentials vorgestellt werden. Dies wäre z. B. der Fall bei der gewöhnlichen Massenanziehung (Gravitation), worauf wir später zurückkommen werden. Indem wir jedoch einstweilen die frühere Annahme festhalten, dass wir es etwa mit einem elektrischen Agens zu thun hätten, formuliren wir das erste Haupttheorem der Potentialtheorie in der Art, dass wir sagen: Die nach einer bestimmten Richtung hin auf die Quantitätseinheit wirkende Kraftcomponente wird durch den negativen Differentialquotienten des Potentials, nach der bezeichneten Richtung genommen, dargestellt. Diese Richtung kann eine ganz beliebige sein; denn wir können jede gegebene Richtung zu einer der Coordinatenaxen wählen, für welchen Fall das ausgesprochene Theorem bereits bewiesen ist. Wir können dasselbe auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 281)$$

Dies gilt auch für den Fall, dass der afficirte Punkt innerhalb des wirksamen Agens gelegen ist. In diesem Falle könnte der Umstand zu Bedenken Anlass geben, dass jenen Elementen dq, welche dem afficirten Punkt am nächsten liegen, unendlich kleine r entsprechen und in Folge dessen in dem Ausdrucke

$\int \frac{1}{r} \cdot dq$ die zu integrirende Function $\frac{1}{r}$ für die besagten Punkte unendlich gross erscheint. Obgleich desshalb nicht ohne Weiteres gefolgert werden kann, dass das Integral selbst unendlich gross werden müsse, wollen wir doch nicht unterlassen, ausdrücklich hervorzuheben, dass es auch in dem soeben erwähnten Falle aus einem sehr naheliegenden Grunde endliche Werthe behält, indem zwar allerdings r unendlich klein wird, wenn wir ein dem afficirten Punkte unmittelbar benachbartes dq in Betracht ziehen, dieses dq selbst aber als ein unendlich Kleines von noch höherer Ordnung anzusehen ist, was sogleich einleuchtet, wenn wir $dq = k \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ setzen, wobei k die Dichte des Agens an der betrachteten Stelle und $dx \cdot dy \cdot dz$ das Raumelement des betreffenden dq bedeutet. In Folge dessen wird der Theil des Potentials, welcher auf die dem afficirten Punkte nächstliegenden Elemente entfällt, sogar unendlich klein und das Gesammtpotential behält einen endlichen Werth, wie aus den späteren Betrachtungen über das Potential einer Kugel auf einen inneren Punkt noch klarer hervorgehen wird.

(**Niveauflächen.**) Der Werth des Potentials $V = \int \frac{dq}{r}$ oder $V = \Sigma \frac{\mu}{r}$ ist offenbar eine Function der Raumcoordinaten des afficirten Punktes, da ja die

$$r = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z^2)]^{\frac{1}{2}}$$

solche Functionen sind. Hieraus folgt, dass der Werth des Potentials im Allgemeinen in verschiedenen Punkten des Raumes verschieden sein wird. Damit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass es unendlich viele Punkte gibt, welchen derselbe Potentialwerth entspricht. Wir nennen den geometrischen Ort solcher Punkte eine Niveaufläche, deren Gleichung z. B. $V = a$ sein wird, wenn wir eine Fläche in's Auge fassen, in deren sämmtlichen Punkten das Potential den constanten Werth a hat.

Es lässt sich leicht zeigen für jeden Punkt einer Niveaufläche, dass die Resultirende sämmtlicher auf ihn einwirkenden Kräfte zur Niveaufläche normal steht und, wenn wir unsere Definition des Potentials festhalten, nach der Seite hin gerichtet ist, nach welcher die Potentialwerthe abnehmen.

Wir denken uns (Fig. 116) eine Schaar von Niveauflächen *I*, *II*, *III* u. s. w., welche den Potentialwerthen $V = a$, $V = b$, $V = c$ u. s. f. entsprechen mögen und fassen zunächst einen in der Fläche *I* gelegenen Punkt *M* ins Auge, in der Absicht, die Richtung *Mn* der Resultirenden *R* aller auf diesen Punkt einwirkenden Kräfte näher festzustellen. Es mögen mit α, β und γ die Winkel bezeichnet sein, unter welchen die Richtung *n* gegen die Coordinatenaxen geneigt ist, wobei wir diese Richtung nach der Seite der abnehmenden Potentialwerthe ($a, b, c, \ldots$) als positiv betrachten. Andererseits denken wir uns durch den Punkt *M* in der Fläche *I* eine beliebige Curve gezogen, von der wir ein Element $Mm = ds$ betrachten, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen $dx = ds \cdot \cos\alpha'$, $dy = ds \cdot \cos\beta'$, $dz = ds \cdot \cos\gamma'$ sein mögen, während dem bereits Gesagten zufolge die den Cordinatenaxen entsprechenden Componenten der Kraft *R* beziehungsweise $X = R\cos\alpha$, $Y = R\cos\beta$, $Z = R\cos\gamma$ sein werden. Um über die Richtung der Kraft *R* aufgeklärt zu werden, stellen wir uns die Aufgabe, den Winkel φ, welcher die besagte Richtung mit dem betrachteten Curvenelemente *ds* einschliesst, zu finden. Dieser Winkel ist bekanntlich gegeben durch die Gleichung

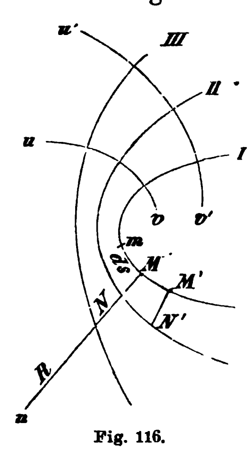


Fig. 116.

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' \quad . \quad 282)$$

welche uns nach Einsetzung der aus den vorstehenden Gleichungen sich ergebenden Werthe für die Richtungscosinus von *R* und *ds* den Ausdruck liefert:

$$\cos\varphi = \frac{X}{R} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{dz}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad 283)$$

Multipliciren wir beiderseits mit *Rds*, während wir andererseits die Kraftcomponenten *X*, *Y* und *Z* im Sinne des ersten Haupttheorems durch die betreffenden negativen Differentialquotienten des Potentials ersetzen, so gestaltet sich der Ausdruck folgendermassen:

$$R\cos\varphi\, ds = -\left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz\right] = -\, d\,V \quad . \quad 284)$$

nämlich gleich dem totalen Differentiale des Potentials beim

Uebergange von M nach m. Dieses Differentiale ist aber, insofern auch m in der Niveaufläche I liegt, gleich 0, da ja auf der Niveaufläche der Potentialwerth allenthalben constant ist. Es ist sonach in unserem Falle auch $R \cos \varphi \cdot ds = 0$, woraus einleuchtet, dass $\cos \varphi = 0$, somit φ gleich einem rechten Winkel ist. In gleicher Weise könnte für jedes andere vom Punkte M ausgehende in der Niveaufläche liegende Curvenelement ds gezeigt werden, dass die Richtung von R einen rechten Winkel mit demselben einschliesst. Es folgt hieraus, dass die Richtung von R zur Niveaufläche normal ist und zwar in jedem Punkte, der dieser Fläche angehört. Wegen eines analogen Verhaltens der Flächen des gleichen Druckes bei Flüssigkeiten und namentlich der freien Oberflächen derselben hat man die Bezeichnung „Niveauflächen" auf die Flächen constanter Potentialwerthe übertragen.

Bezeichnen wir eine von M aus gemessene Länge der Normale mit n, also ein Element derselben mit dn, so sellt $-\frac{dV}{dn}$ die Grösse der im betrachteten Punkte M wirkenden Kraft vor, womit zugleich angedeutet ist, dass die Kraft nach der Seite der abnehmenden Potentialwerthe (nach der Seite der negativen dV) hin wirkt.

Denken wir uns die Niveauflächen I, II, III einander sehr nahe und gleichen Differenzen der Potentialwerthe entsprechend, so dass $a - b = b - c = \ldots = \alpha$ eine sehr kleine Zahl ist, und betrachten wir zunächst das Intervall zwischen den Niveauflächen I und II, indem wir an verschiedenen Punkten M und M' der ersten Fläche Normalen errichten, welche die 2te beziehungsweise in N und N' treffen. Die zwischen beiden Flächen liegenden Segmente der Normalen wollen wir $MN = \varepsilon$, $M'N' = \varepsilon'$ u. s. w. heissen. Offenbar stellt dann $-\frac{\alpha}{\varepsilon}$ eine Grösse vor, die bei unendlicher Abnahme von α und ε den Differentialquotienten $-\frac{dV}{dn}$ zur Grenze hat, somit die Kraftintensität beziehungsweise in den Punkten M und M' angibt. Damit ist uns vor Augen gelegt, dass diese Kraftintensität in dem Masse abnimmt, als, bei constantem α, ε wächst, dass also z. B. auf M', wo der Abstand $M'N'$ der beiden aufeinanderfolgenden Niveauflächen grösser ist, eine kleinere Kraft wirkt als auf M, wo dieser Abstand MN kleiner ist.

Denken wir uns durch fortgesetzte Construction von Normalen Curven *uv*, *u'v'* construirt, welche die aufeinanderfolgenden, Niveauflächen senkrecht durchsetzen, so erhalten wir die orthogonalen Trajectorien, welche man auch Kraftlinien zu nennen pflegt. In der That ist nach dem Gesagten leicht einzusehen, dass die Tangente einer Kraftlinie allenthalben die Richtung der in dem betreffenden Punkte wirkenden Kraft vorstellt, sowie andererseits die zwischen den aufeinanderfolgenden, gleichen Potentialdifferenzen entsprechenden, Niveauflächen gelegenen Segmente der Kraftlinie ein Mass für die Intensität der Kraft von einem Durchschnittspunkte der betreffenden Niveaufläche zum andern in der bereits angegebenen Weise an die Hand geben. Der Antrieb längs einer Kraftlinie ist desto grösser, in je kürzeren Intervallen längs derselben die gleichen Potentialdifferenzen entsprechende Aufeinanderfolge der Niveauflächen stattfindet.

Zur näheren Erläuterung mögen noch einige Beispiele dienen. Wir denken uns eine kreisförmige Scheibe eines die Elektricität leitenden Materiales in der (Figur 117) angedeuteten Weise in den Schliessungskreis eines elektrischen Stromes eingeschaltet und stellen uns durch *I*, *II*, *III*, *IV* aufeinanderfolgende Niveauflächen des Potentials vor.

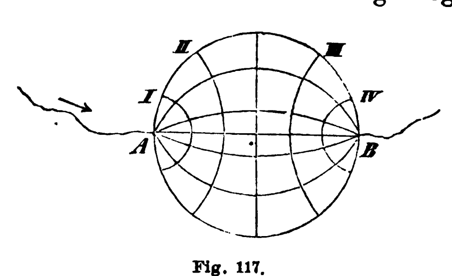


Fig. 117.

Die Trajectorien derselben geben uns in der bereits näher angegebenen Weise Aufschluss über die an verschiedenen Punkten der Scheibe wirksamen Kräfte, deren Richtung und Intensität für die Elektricitätsbewegung längs der betreffenden Kraftlinie massgebend sein werden. Insofern die Tangente der Kraftlinie allerorten die Kraftrichtung anzeigt, werden die Elektricitätsmengen, welche den die Scheibe durchsetzenden Strom ausmachen, längs der einzelnen Kraftlinien von Pol zu Pol übergeführt werden; insofern erscheinen also diese Kraftlinien auch als Strombahnen, wesshalb man sie auch Stromlinien genannt hat. Strombahnen dieser Art von endlichem Querschnitte nennt man auch Stromfäden. Nach unserer Zeichnung führen die dem Durchmesser *AB* näher liegenden Stromfäden mehr Elektricität über als die weiter davon entfernten,

da die Segmente zwischen den aufeinanderfolgenden Niveauflächen bei den ersteren kürzer sind als bei den letzteren.

(**Eigenschaften und Anwendungen des Integrals** $\int R \cos \varphi \, ds$.) Wir denken uns zwei den Potentialwerthen V_1 und V_2 entsprechende Niveauflächen (Fig. 118) und von einem Punkte M_1 der einen zu einem Punkte M_2 der zweiten Niveaufläche eine beliebige Curve $M_1 M M_2$ gezogen; wir verfolgen den Lauf dieser Curve und betrachten in jedem Punkte M derselben die Kraft R, welche daselbst wirksam ist, sowie den Ausdruck $R \cos \varphi \, ds$, wobei φ den Winkel bedeutet, welchen die Kraftrichtung R mit dem Curvenelemente $Mm = ds$ einschliesst. Nach Formel 284 ist $R \cos \varphi \, ds = - d V$, d. h. gleich der negativen Aenderung des Potentialwerthes beim Uebergange aus M in m. Integrirt man daher diesen Differentialausdruck für die ganze zwischen den beiden vorgenannten Niveauflächen liegende Curve, so erhält man:

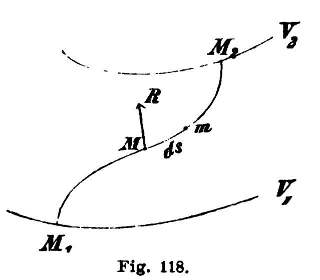


Fig. 118.

$$\int_{s_1}^{s_2} R \cos \varphi \, ds = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2 \quad . \quad . \quad 285)$$

Der Werth des Integrals wird also durch die Differenz der Potentialwerthe dargestellt, welchen die Niveauflächen entsprechen, aus deren einer der Uebergang auf einem ganz beliebigen Wege in die andere stattfinden kann. Das Integral ist daher auch von eben diesem Wege ganz unabhängig. Würde die Curve, von einer Niveaufläche V_1 ausgehend, wieder in dieselbe zurückkehren, also $V_2 = V_1$ sein, so hätte man

$$\int R \cos \varphi \, ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 286)$$

Ein noch speciellerer Fall wäre der, dass die betrachtete Curve in sich selbst zurückkehrt. Kehrt der Punkt in einer geschlossenen Curve in seine frühere Stellung zurück, so muss eben auch der besagte Integralwerth 0 sein.

Der Ausdruck Formel 285 ist analog dem im ersten Hauptstücke beim Lehrsatze von der lebendigen Kraft (Formel 49) vorkommenden Ausdrucke $\int R \cos \varphi \, ds = \int S \cdot ds = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}$. Denken wir uns in der That den Punkt M unter dem Ein-

flusse von Kräften sich bewegend, die ein Potential haben, d. h. von der Art sind, dass an jeder Stelle M die daselbst wirksame Kraft R durch den Differentialquotienten eines Potentialwerthes nach der entsprechenden Richtung dargestellt werden kann, so wird das besprochene Integral, welches die Arbeit der Kraft R auf dem Wege $M_1 M M_2$ darstellt, zugleich die Aenderung der lebendigen Kraft des Beweglichen ausdrücken, beim Uebergange aus der Niveaufläche V_1 in jene V_2. Kehrt also z. B. das Bewegliche wieder in dieselbe Niveaufläche zurück (passirt z. B. ein aufwärts geworfener Körper, der eine bestimmte Horizontalebene mit einer gewissen Geschwindigkeit verlassen hat, auf dem Rückwege wieder dieselbe Horizontalebene), so wird die stets der Differenz der Potentialwerthe entsprechende Aenderung der lebendigen Kraft gleich 0 sein, d. h. das Bewegliche wird bei jedem Durchgange durch eine und dieselbe Niveaufläche immer wieder dieselbe lebendige Kraft besitzen.

Wir wollen nun beispielsweise den Ausdruck Formel 285 durch die Annahme specialisiren, dass wir $R = J$, gleich der Totalintensität des Erdmagnetismus an einem beliebigen Punkte M (Fig. 119) der Erdoberfläche setzen, während ds ein Element Mm einer beliebig auf der Erdoberfläche durch den Punkt M gezogenen Curve $MM'M''$ vorstellen mag und φ sonach den Winkel CMB, welchen die erdmagnetische Kraftrichtung MB mit dem besagten Curvenelemente Mm, beziehungsweise der Curventangente Mt im Punkte M einschliesst.

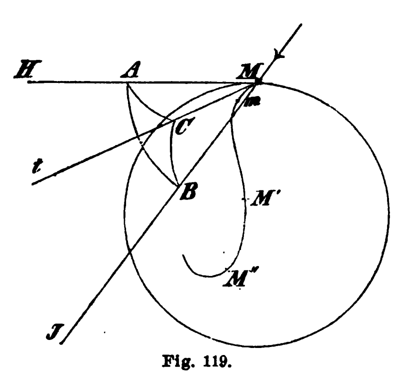


Fig. 119.

Wir denken uns ferner die erdmagnetische Kraft J in der üblichen Weise in eine horizontale und verticale Componente zerfällt, deren erstere $H = J \cos i$ sein wird, wenn i den Inclinationswinkel (AMB) bezeichnet. Endlich möge noch der Winkel AMC, welchen die Horizontalcomponente mit dem Curvenelemente bildet, durch γ ausgedrückt werden. Denken wir uns um den Punkt M mit dem Radius 1 eine Kugel beschrieben, so bestimmen die betrachteten drei Richtungen J,

H und t ein sphärisches Dreieck BAC, welches, da AMC in einer horizontalen Ebene, AMB dagegen in einer verticalen Ebene liegt, bei A rechtwinklig ist. Es ist sonach $\cos BC = \cos AC \cdot \cos AB$, d. i.

$$\cos \varphi = \cos \gamma \cdot \cos i \quad \ldots\ldots \quad 287)$$

Durch Substitution dieses Werthes geht der Ausdruck $J \cos \varphi ds$ wegen $J \cos i = H$ in $H \cos \gamma ds$ über, wodurch wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} H \cos \gamma\, d s &= -\, d V \\ \int H \cos \gamma ds &= V_1 - V_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 288)$$

Würde man also z. B. eine beliebige geschlossene Curve auf der Erdoberfläche verzeichnen, sodann Punkt für Punkt die Horizontalcomponente H in Betracht ziehen, sowie deren Winkel γ mit dem betreffenden Curvenelemente ds, so würde das der Rückkehr in den Ausgangspunkt entsprechende Integral von $H \cos \gamma ds$ gleich 0 sein müssen, eine Relation, deren Zutreffen sich wenigstens annähernd in folgender Weise prüfen lässt:

Wir verbinden auf einer Landkarte beliebige Orte A, B, C u. s. w. durch gerade Linien, so dass wir ein geschlossenes Polygon $ABC \ldots A$ erhalten, welches uns die Stelle einer auf der Erdoberfläche gezogenen Curve vertreten soll. Sind nun in den einzelnen Punkten A, B, C u. s. w. die Horizontalintensitäten H bekannt, ferner auch die magnetischen Declinationen und die aus der Landkarte leicht zu entnehmenden Azimuthalwinkel, welche die Verbindungslinien AB, BC u. s. f. mit den betreffenden Ortsmeridianen einschliessen, wodurch wir dann eben auch die Winkel γ erfahren, und bezeichnen wir endlich die Ortsdistanzen AB, $BC \ldots$ mit $\triangle s$, so können wir die Summe $\Sigma H \cos \gamma \triangle s$ bilden, welche, wie Gauss in einem Beispiele gezeigt hat, nahezu gleich 0 sich herausstellt. Zur Erzielung einer grösseren Annäherung kann in Bezug auf jedes $\triangle s$ das Mittel des Anfangs- und Endwerthes von $H \cos \gamma$ eingesetzt werden.

Denken wir uns endlich noch die bisher beliebig auf der Erdoberfläche verzeichnete Curve, deren Element ds in den vorstehenden Formeln erscheint, sei ein sogenannter magnetischer Meridian, d. i. eine Curve, deren ds überall mit der Richtung der Magnetnadel übereinstimmt, so wird $\gamma = 0$, $\cos \gamma = 1$ und somit

$$H ds = - dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 289)$$

Denkt man sich daher auf einem Globus Curven gezeichnet, welche den Durchschnittslinien der Erdoberfläche mit den Niveauflächen aufeinanderfolgender Werthe des magnetischen Potentials entsprechen,*) welche Curven wir Potentialcurven nennen wollen, und nimmt man an, dass jene aufeinanderfolgenden Potentialwerthe gleiche, sehr kleine Differenzen dV haben, so erscheinen die zwischen den besagten Potentialcurven gelegenen Segmente ds eines magnetischen Erdmeridians mit der magnetischen Horizontalintensität H an der betrachteten Stelle verkehrt proportional, d. h. die Horizontalintensität des Erdmagnetismus ist allerorten desto grösser oder kleiner, je kleinere oder grössere Strecken eines magnetischen Erdmeridians zurückgelegt werden müssen, um gleiche Differenzen des magnetischen Potentials zu erreichen.

Hinsichtlich der Analogien zwischen den Niveauflächen des Potentials und den gleichnamigen Gleichgewichtsflächen bei Flüssigkeiten verweisen wir auf das zweite Hauptstück.

Wir wenden uns nun der Untersuchung über (**die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten des Potentials**) zu, nachdem wir jene des ersten Differentialquotienten bereits erörtert haben. Dabei wollen wir einen Weg einschlagen, der uns Gelegenheit bieten wird, nebenher noch einige andere für die Folge nothwendige Lehrsätze abzuleiten, indem wir uns zunächst die Aufgabe stellen, die Potentialwerthe von homogenen Kugelschalen und Vollkugeln, sowohl für innere wie auch für äussere Punkte zu untersuchen.

Wir denken uns (Fig. 120) eine mit den Radien a und

---

*) Jene Punkte, in welchen die Erdoberfläche von Niveauflächen des magnetischen Potentials berührt wird, nennt man magnetische Pole. Da die magnetische Totalkraft in jedem Punkte einer Niveaufläche auf dieser normal steht und sonach im Berührungspunkte einer Niveaufläche mit der Erdoberfläche auch auf dieser normal stehen muss, so lassen sich die magnetischen Pole der Erde auch als diejenigen Punkte definiren, in welchen die frei schwebende Magnetnadel vertical steht, d. h. die Inclination gleich 90° $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$. Es erhellet hieraus zugleich, dass die magnetischen Pole der Erde wesentlich verschieden von den Punkten sind, in welchen ein Intensitätsmaximum des Erdmagnetismus stattfindet, was keineswegs eine verticale Stellung der Magnetnadel bedingt.

$a + da$ beschriebene Kugelschale von der Dicke da gleichförmig mit einem Agens von der Dichte k ausgefüllt und wollen das Potential dieser Kugelschale auf einen Punkt P bestimmen, der sich im Abstande $OP = \varrho$ vom Centrum der Kugelschale befinden mag. Wir betrachten zuerst ein bei M befindliches Element dq der Kugelschale, welches wir uns in folgender Weise begrenzt denken. Lässt man den Radius OM, der mit OP den Winkel φ bildet, eine Bewegung im Betrage $d\varphi$ ausführen, so beschreibt der Punkt M den unendlich kleinen Bogen $Mm = a\,d\varphi$. Lässt man nun weiter die Ebene des Winkels MOP oder MOx eine Winkelbewegung um Ox als Axe im Betrage $d\psi$ ausführen, so beschreibt der Punkt M (z. B. aus der Zeichnungsebene heraustretend) einen dem Radius $MD = a \sin\varphi$ entsprechenden Bogen $a \sin\varphi \cdot d\psi$. Diese beiden Bewegungen nebst der Dicke $MM' = da$ der Kugelschale können als drei auf einander senkrechte Kanten eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelopipeds vom Rauminhalte $da \cdot a\,d\varphi \cdot a \sin\varphi\, d\psi$, somit vom Masseninhalte $dq = k\,a\,da\,a \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$. Wir hätten demnach $\frac{dq}{r}$ in Bezug auf ψ und φ für die ganze Kugelschale zu integriren, was wir am einfachsten in der Art bewerkstelligen, dass wir durch vollständige Umdrehung der Ebene MOx um die Axe Ox zunächst eine Zone ausschneiden, deren Inhalt

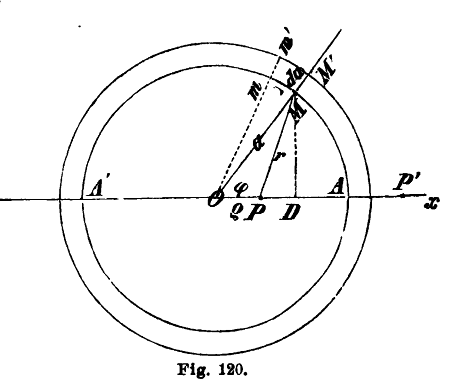


Fig. 120.

$$dQ = 2\pi k\,a\,da\,a \sin\varphi\, d\varphi$$

sein wird (da 2π für $d\psi$ zu setzen kommt) und indem wir ferner in dem nunmehr zu integrirenden Ausdrucke: $\frac{dQ}{r}$ für r den Werth einsetzen, der sich mit Rücksicht auf das Dreieck MOP aus der Gleichung $r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi$ durch Differentiation ergibt, nämlich (da a und ϱ constant sind) $r = \frac{a\varrho \sin\varphi\, d\varphi}{dr}$, wodurch wir für das gesuchte Potential V_i auf

den inneren Punkt P*) erhalten

$$V_i = \int \frac{dQ}{r} = \frac{2\pi k a d a}{\varrho} \int_{a-\varrho}^{a+\varrho} dr,$$

somit

$$V_i = 4\pi k a d a \quad \ldots \ldots \ldots \quad 290)$$

Wollte man diesen Ausdruck in der Form schreiben $\frac{4\pi k a^2 da}{a}$, so würde derselbe den Masseninhalt**) der Kugelschale, dividirt durch deren Radius vorstellen. Jedenfalls lässt er sofort erkennen, dass der Werth des Potentials von der Lage des Punktes im Innern der Kugelschale unabhängig ist.

Wäre der afficirte Punkt ein äusserer (P' in der Figur), für welchen $r = P'M$ sein würde, so hätte man, um das Potential V_e auf diesen äusseren Punkt zu finden, als Integrationsgrenzen $P'A = \varrho - a$ und $P'A' = \varrho + a$ einzusetzen, wodurch

$$V_e = \frac{4\pi k a^2 da}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 291)$$

sich ergibt. Das Potential einer Kugelschale auf einen äusseren Punkt entspricht also dem Masseninhalte der Kugelschale, dividirt durch den Abstand des afficirten Punktes von deren Mittelpunkt, ein Ausdruck, der sich auch ergeben würde, wenn man sich die ganze Masse der Kugelschale in deren Centrum vereinigt dächte.

Indem wir von dieser letzteren Auffassung Gebrauch machen, ist es leicht, die Potentialwerthe sowohl einer Kugelschale von endlicher Dicke als auch einer Vollkugel auf einen äusseren Punkt sofort anzugeben. Man kann sich nämlich in beiden Fällen eine Zerlegung in unendlich dünne Kugelschalen ausgeführt und deren Masseninhalte in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte concentrirt denken. In beiden Fällen wird der gesuchte Potentialwerth dem Masseninhalte des betrachteten Volums (Kugelschale oder Vollkugel), getheilt durch den Ab-

*) Man bemerke nämlich, dass hier r innerhalb der Grenzen $PA = a - \varrho$ und $PA' = a + \varrho$ sich bewegt.

**) Wir verstehen hier unter Masse ganz allgemein die Quantität eines Agens, ohne demselben damit von vornherein das Attribut der Trägheit beizulegen.

stand des Mittelpunktes vom afficirten Punkte, gleich sein, also z. B. für eine Vollkugel

$$V_e' = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi k a^3}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 292)$$

Um das Potential einer Kugelschale von endlicher Dicke $a_2 - a_1$ auf einen inneren Punkt zu finden, denke man sich wieder die gegebene Kugelschale in Kugelschalen von der unendlich kleinen Dicke dx, je einem Radius x entsprechend, zerlegt. Für jede solche elementare Kugelschale wird nach Formel 290 das Potential $4\pi k x dx$ sein, somit für die Kugelschale, deren innerer und äusserer Radius beziehungsweise a_1 und a_2 sind,

$$V_i' = 4\pi k \int_{a_1}^{a_2} x\, dx = 2\pi k (a_2^2 - a_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 293)$$

Suchen wir endlich noch den Potentialwerth einer Vollkugel vom Radius a auf einen inneren Punkt im Abstande ϱ vom Mittelpunkte, so brauchen wir uns nur durch diesen afficirten Punkt eine concentrische Kugelfläche vom Radius ϱ gelegt zu denken, welche die ganze Vollkugel in eine kleinere Vollkugel vom Radius ϱ und in eine Kugelschale von der Dicke $a - \varrho$ abtheilt. In Bezug auf erstere kann der afficirte Punkt als ein äusserer, im Abstande ϱ vom Mittelpunkte angesehen werden, in Bezug auf letztere als ein innerer. Wir erhalten demnach für das gesuchte Potential V mit Zuziehung der Formeln 292 und 293 den Ausdruck

$$V = \frac{4}{3} \frac{\pi k \varrho^3}{\varrho} + 2\pi k (a^2 - \varrho^2) = 2\pi k (\tfrac{2}{3} \varrho^2 + a^2 - \varrho^2), \text{ somit}$$

$$V = 2\pi k \left(a^2 - \frac{\varrho^2}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 294)$$

Macht man den Mittelpunkt O (Fig. 121) der betrachteten Vollkugel zum Ursprung eines Coordinatensystems, in welchem dem afficirten Punkte P die Coordinaten x, y und z entsprechen, welche für den Abstand ϱ dieses Punktes vom Centrum die Relation $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ergeben, also $\frac{\partial \varrho^2}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial \varrho^2}{\partial y} = 2y$

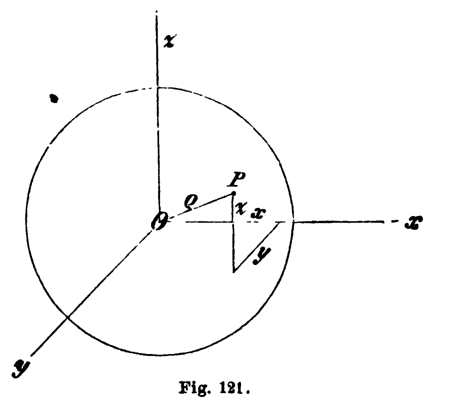


Fig. 121.

und $\frac{\partial \varrho^2}{\partial z} = 2z$, so führt die Differentiation des soeben abgeleiteten Potentialwerthes $V = 2\pi k\left(a^2 - \frac{\varrho^2}{3}\right)$ mit Rücksicht auf den Umstand, dass $2\pi k a^2$ constant ist, auf folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\tfrac{2}{3}\pi k \frac{\partial \varrho^2}{\partial x} = -\tfrac{4}{3}\pi k x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\tfrac{2}{3}\pi k \frac{\partial \varrho^2}{\partial y} = -\tfrac{4}{3}\pi k y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\tfrac{2}{3}\pi k \frac{\partial \varrho^2}{\partial z} = -\tfrac{4}{3}\pi k z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 295)$$

Differenzirt man sofort ein zweites Mal, so ergibt sich weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\tfrac{4}{3}\pi k \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\tfrac{4}{3}\pi k \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\tfrac{4}{3}\pi k \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 296)$$

Es sind sonach die zweiten Differentialquotienten dieses Potentialwerthes unter sich gleiche, constante Grössen, welche der Dichte des Agens proportional sind, und man findet für deren Summe, die man durch das Symbol $\triangle V$ darzustellen pflegt, den Werth

$$\left.\begin{aligned} \triangle V &= -4\pi k \\ k &= -\frac{\triangle V}{4\pi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 297)$$

ein Ausdruck, der uns von den zweiten Differentialquotienten des Potentials einen Schluss auf die Dichten des Agens vermittelt, während wir aus dem ersten Differentialquotienten des Potentials die den afficirten Punkt antreibenden Kraftcomponenten hergeleitet haben.

Wir wollen nun weiter untersuchen, welchen Werth $\triangle V$ im Allgemeinen annimmt, wenn das Agens nicht kugelförmig begrenzt ist und der afficirte Punkt entweder innerhalb oder ausserhalb desselben angenommen wird. Betrachten wir zuerst den letzteren Fall und differenziren wir vorerst $V = \int \frac{dq}{r}$ zweimal nach x, so kommt

$$\frac{\partial^2 \int \frac{dq}{r}}{\partial x^2} = \int dq \, \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \int dq \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x'-x)^2}{r^5} \right],$$

wenn wir berücksichtigen, dass

$$\frac{1}{r} = \left[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

und die Formeln 36 bis 38 der mathematischen Einleitung anwenden. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x'-x)^2}{r^5} \quad \ldots\ldots \quad 298)$$

und in ganz analoger Weise ergeben sich die zweiten Differentialquotienten des Potentials nach y und z, so dass wir nachstehende Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \int dq \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x'-x)^2}{r^5} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int dq \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(y'-y)^2}{r^5} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int dq \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(z'-z)^2}{r^5} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 299)$$

Durch Addition finden wir:

$$\Delta V = \int dq \left[-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} \left\{ (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \right\} \right],$$

also mit Rücksicht auf den Werth von

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 = r^2$$

$$\Delta V = 0 \quad . \; . \quad 300)$$

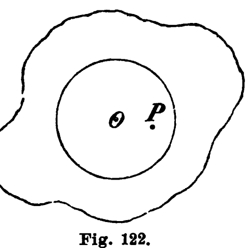


Fig. 122.

Aus dieser, bereits von Laplace nachgewiesenen Beziehung erhellt, dass ΔV der Null gleich wird in dem Falle, wenn der afficirte Punkt dem betrachteten Agens nicht angehört, indem er eben ausserhalb desselben gelegen ist. Denken wir uns nun weiter ein von einer ganz beliebigen Fläche (Fig. 122) umschlossenes Agens und untersuchen wir ΔV hinsichtlich des Potentials in einem

Punkte P, der diesem Agens angehört. Wir construiren eine Kugel, von deren Mittelpunkt O der Punkt P um eine Strecke OP abliegt, welche beliebig, jedoch kleiner als der Radius der Kugel ist, so dass dieselbe den Punkt einschliesst. Das Gesammtpotential V des vorhandenen Agens kann man sich nun in zwei Theile V_1 für die Kugel und V_2 für den Theil ausserhalb der Kugel zerlegt denken, wesshalb in diesem Falle $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ werden wird. Bezüglich der Kugel ist nach Formel 297 klar, dass $\Delta V_1 = -4\pi k$ ist, wobei k die Dichte des Agens innerhalb der Kugel vorstellt. Bezüglich des Agens ausserhalb der Kugel erscheint nun P als äusserer Punkt, d. h. als ein Punkt, der dem Agens, dessen Potential in P mit V_2 bezeichnet worden ist, nicht angehört. Es ist somit $\Delta V_2 = 0$ und folglich auch in diesem Falle

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad 301)$$

Da die Kugel, welche den Punkt P einschliesst, in beliebiger Kleinheit angenommen werden kann, so können wir k als die Dichte des Agens ansehen an der Stelle, wo sich der Punkt P befindet; die bewiesene Relation gilt also auch in dem Falle, wenn das Agens nicht homogen, also k nicht in seiner ganzen Ausdehnung constant ist.

(Anordnung der Elektricität auf einem Leiter.) Die bisher vorgetragenen Sätze führen zu wichtigen Anwendungen in der Elektrostatik. Wenn wir nach den Bedingungen fragen, unter welchen sich die Elektricität auf einem isolirten Leiter im Gleichgewichte befinden kann, so überzeugen wir uns leicht von der Giltigkeit des folgenden Satzes:

Es ist für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend, dass das Potential im Innern des Leiters constant und gleich jenem an der Oberfläche sei, welche demnach eine Niveaufläche sein muss.

Dass die angeführte Bedingung für das Gleichgewicht nothwendig ist, ergibt sich aus folgender Erwägung. Nehmen wir an, das Potential sei im Innern des Leiters von irgend einem Punkte P aus nach einer bestimmten Richtung Px hin nicht constant, so können wir das Potential im Punkte P nach der bezeichneten Richtung differenziren, und $-\frac{dV}{dx}$ würde uns dann eine auf die positive Quantitätseinheit im Punkte P aus-

geübte Kraft darstellen, während auf eine im Punkte P angenommene negative Quantitätseinheit eine gleichgrosse Kraft von entgegengesetzter Richtung entfiele. Wäre nun der Leiter an der Stelle des Punktes P in der That unelektrisch gewesen, welchen unelektrischen Zustand wir uns derart vorstellen können, dass im Punkte P die gleichen und entgegengesetzten Elektricitäten $+\mu$ und $-\mu$ vereinigt gewesen wären, wie es eben der neutrale Zustand erfordert, so würden diese beiden Elektricitätsmengen bei der angenommenen Veränderlichkeit des Potentials in der bezeichneten Richtung jede mit einer Kraft vom Betrage $\mu \frac{dV}{dx}$ in entgegengesetztem Sinne zur Bewegung angeregt werden, d. h. es müsste sofort eine Scheidung von $+\mu$ und $-\mu$, also eine Elektricitätsentwickelung im Punkte P stattfinden, was mit der vorausgeschickten Annahme des Gleichgewichtszustandes nicht vereinbar ist. Das Potential muss also in jedem Punkte im Innern des Leiters nach allen Richtungen hin constant sein und, da wir diese Schlussfolgerung bis an die Oberfläche ausdehnen können, denselben Werth haben, wie an der Oberfläche selbst. Für einen Punkt der Oberfläche ändert sich das Potential längs der Oberfläche und von derselben einwärts nicht, wohl aber nach auswärts, was jedoch, wie leicht einzusehen, mit dem elektrischen Gleichgewichte wohl vereinbar ist; denn der Gesammtantrieb $-\frac{dV}{dn}$ auf die Quantitätseinheit eines Punktes der Oberfläche (wobei dn ein Element der Normale bedeutet) wird wirkungslos bleiben, wenn der Leiter, wie wir von vornherein angenommen haben, isolirt, d. h. von einem Nichtleiter umgeben ist. Damit ist bewiesen, dass die angeführte Bedingung $V = \text{Const.}$ für das Gleichgewicht nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist.

Trifft aber diese Bedingung zu, so folgt daraus einerseits, dass die Oberfläche des Leiters eine Fläche von constantem Potential, d. i. eine Niveaufläche sein muss und andererseits dass in jedem Punkte des Leiters innerhalb der Oberfläche $\Delta V = 0$, folglich nach Formel 297 auch $k = 0$, so dass also im Innern des Leiters sich überhaupt gar keine Elektricität befinden kann. Das Innere des Leiters ist also, wenn elektrisches Gleichgewicht bestehen soll, stets als unelektrisch an-

zusehen*), indem sich die Elektricität nach dem Gesagten nur ausserhalb der Oberfläche — wir können uns vorstellen, in einer sehr dünnen Schichte — auf derselben anordnen kann.

Nennen wir nun für ein beliebiges Differential der Oberfläche $MM' = d\sigma$ (Fig. 123) ε die Dicke der darauf befindlichen elektrischen Schichte, innerhalb welcher wir uns k als constant denken, so bestimmen wir damit eine unendlich kleine im Raumelemente $MM'mm'$ enthaltene Elektricitätsmenge $dq = k\varepsilon d\sigma$.

Setzen wir

$$k\varepsilon = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 302)$$

so bedeutet diese Grösse die auf die Flächeneinheit reducirte Elektricitätsmenge, welche man Flächendichte zu nennen pflegt.

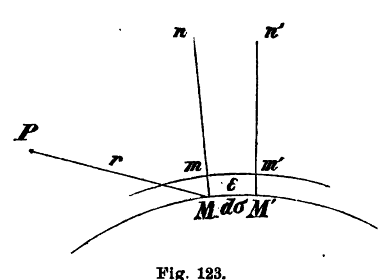


Fig. 123.

Betrachten wir das Potential des besagten Elektricitätsquantums dq auf einen in der Entfernung $MP = r$ davon befindlichen Punkt P, so können wir dasselbe statt mit $\frac{dq}{r}$ auch mit $\frac{h\,d\sigma}{r}$ darstellen und für das Gesammtpotential der auf der Oberfläche des Leiters ausgebreiteten Elektricität auf den afficirten Punkt schreiben

$$\int\frac{dq}{r} = \int\frac{h\,d\sigma}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 303)$$

Andererseits würde das Integral $\int h\,d\sigma$ für sich allein offenbar die ganze auf der Oberfläche des Leiters vorhandene Elektricitätsmenge, d. i. die sogenannte Ladung Q des Leiters angeben, für welche wir demnach die Formel erhalten

$$Q = \int h\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 304)$$

Da ferner der in der Richtung der Normale Mn wirksame Antrieb R auf die Quantitätseinheit im Punkte M nach dem

---

*) Der Fall, wenn ein Leiter Hohlräume enthält, wird später besonders betrachtet werden.

im Vorhergehenden über die Niveaufläche Gesagten durch $-\frac{dV}{dn}$ ausgedrückt wird, so wird der auf die Flächeneinheit reducirte Antrieb R_1 bei M offenbar durch

$$R_1 = -h\frac{dV}{dn} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 305)$$

und der Antrieb auf die über dem Flächenelemente $d\sigma$ gelagerte Elektricitätsmenge durch

$$R_1 d\sigma = -h\frac{dV}{dn}d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 306)$$

ausgedrückt werden. Die Integration des letzten Differentialausdruckes führt offenbar zur Kenntniss der Summe aller Antriebe, welche auf die Oberflächenelemente des betrachteten Leiters ausgeübt werden, welche Summe man der Kürze wegen auch Oberflächenspannung genannt hat. Bezeichnen wir sie mit S, so erhalten wir

$$S = -\int h\frac{dV}{dn}d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 307)$$

Würden wir dem Leiter anstatt der Ladung Q, welche er bisher hatte, eine n mal grössere Ladung Q' ertheilen, so würde (vorausgesetzt, dass wir es mit dem betrachteten isolirten Leiter allein zu thun haben) ein Oberflächenpotential $V' = nV$ und eine Oberflächendichte $h' = nh$ sich einstellen und die Folge davon wäre ein auf die Flächeneinheit reducirter Antrieb R_1' vom Betrage

$$R_1' = -h'\frac{dV'}{dn} = -n^2 h\frac{dV}{dn} \quad . \; . \; . \; . \quad 308)$$

Der auf die Flächeneinheit reducirte Antrieb — man hat denselben auch Spannung genannt — ist demnach dem Quadrate der Ladung proportional oder, insofern die Flächendichte proportional der Ladung wächst, dem Quadrate der Flächendichte selbst proportional.*) Dabei soll jedoch erinnert werden, dass der Ausdruck „Spannung“ häufig auch in anderen Bedeutungen, z. B. im Sinne einer dem Potential oder auch im Sinne einer der Flächendichte proportionalen Grösse gebraucht wird.

*) Vergleiche Formel 310 oder 321, welche in Verbindung mit 305 dasselbe Resultat ergeben.

(**Kugelförmiger Leiter; Bedeutung von** $-\frac{dV}{dn}$ **und** $-\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma$.) Die vorgetragenen Lehrsätze lassen die Anordnung der Elektricität auf der Oberfläche eines isolirten Leiters beurtheilen, welches Problem jedoch nur in den allereinfachsten Fällen eine leicht ausführbare analytische Behandlung gestattet. Der einfachste Fall dieser Art ist der eines isolirten kugelförmigen Leiters, auf welchem sich die Elektricität, wie unmittelbar einleuchtend ist, mit durchaus gleicher Flächendichte anordnen muss. Wir erhalten demnach, wenn a den Kugelradius bedeutet, $h = \frac{Q}{4\pi a^2}$. Da nun andererseits, weil $\frac{Q}{a}$ das Potential auf einen Punkt der Oberfläche ist, und die Normale überall die Richtung des Radius hat, offenbar

$$-\frac{dV}{dn} = -\frac{dV}{da} = -\frac{d\frac{Q}{a}}{da} = \frac{Q}{a^2}$$

ist, so ergibt sich aus diesen beiden Relationen die bemerkenswerthe Beziehung

$$h = \frac{-\frac{dV}{da}}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 309)$$

eine Beziehung, von welcher sich mit Hilfe des später zu besprechenden Green'schen Lehrsatzes zeigen lässt, dass sie auch für nicht kugelförmige Leiter Geltung hat, wesshalb wir allgemein werden schreiben können:

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi h \quad \ldots\ldots\ldots \quad 310)$$

Denken wir uns die Kugel vom Radius a, auf welcher die Ladung Q ausgebreitet ist, von einer concentrischen Kugelfläche, deren Radius ϱ sein soll, eingeschlossen, so wird das Potential auf einen Punkt dieser grösseren Kugel, der also bezüglich der eingeschlossenen Kugel als ein äusserer Punkt im Abstande ϱ von deren Centrum erscheint, nach dem Vorhergehenden (Formel 291) den Werth $\frac{Q}{\varrho}$ haben, und der Differentialquotient des Potentials in der Richtung eines Radius ϱ wird sein $-\frac{Q}{\varrho^2}$. Bildet man nun das Integral

$$-\int \frac{Q}{\varrho^2}\, d\sigma = +\int \frac{dV}{d\varrho}\, d\sigma$$

für die ganze Oberfläche der einschliessenden Kugel, indem man unter $d\sigma$ ein Element dieser Oberfläche versteht, so wird dasselbe, da ϱ für alle Punkte der betrachteten Kugelfläche constant ist, den Werth annehmen

$$-\frac{Q}{\varrho^2}\int d\sigma = -\frac{Q}{\varrho^2}\cdot 4\pi\varrho^2 = -4\pi Q, \text{ also } -\int \frac{dV}{d\varrho}\, d\sigma = 4\pi Q,$$

wobei also Q die von der Kugelfläche, über welche die Integration ausgedehnt worden ist, eingeschlossene Elektricitätsmenge bedeutet. Auch von dieser Relation wird später mit Hilfe des Green'schen Lehrsatzes gezeigt werden, dass sie allgemeine Geltung hat in der Form

$$-\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = 4\pi Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 311)$$

wenn man unter dn im Allgemeinen ein Element der Normale an dem Elemente ds einer beliebigen geschlossenen Fläche versteht, während Q die Elektricitätsmenge ist, die von dieser Fläche eingeschlossen wird.

(**Ellipsoidischer Leiter; Spitzen.**) Zu diesen Schlussfolgerungen sind wir durch die Betrachtung der elektrischen Anordnung auf einer leitenden Kugel geführt worden. Wir wollen nun auch den Fall eines ellipsoidischen Leiters betrachten, den wir uns isolirt und mit Elektricität geladen denken. Wir schicken einen mathematischen Lehrsatz voraus, von welchem wir dabei Gebrauch machen werden.

Man denke sich (Fig. 124) zwei concentrische und ähnliche Ellipsoide $AaMBb$ und $A'a'M'B'b'$ beziehungsweise den Gleichungen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ und $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$ entsprechend, deren Halbaxen a und a', b und b', c und c' beziehungsweise zusammenfallen und der Relation

$$a' = (1+\alpha)\,a,\quad b' = (1+\alpha)\,b,\quad c' = (1+\alpha)\,c$$

unterliegen.

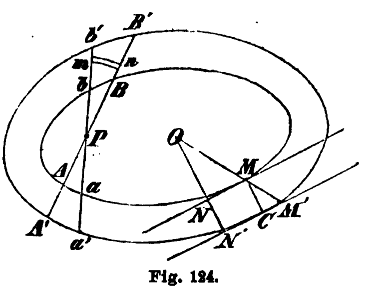


Fig. 124.

Wir untersuchen die von den beiden ellipsoidischen

Flächen begrenzte Schale. Wir wählen innerhalb derselben einen beliebigen Punkt P und ziehen durch denselben eine beliebige Gerade $A' B'$. Unser Lehrsatz (dessen Nachweisung nicht hieher gehört) lautet nun dahin, dass die durch die Grenzflächen der besagten ellipsoidischen Schale bestimmten Segmente BB' und AA' der gezogenen Geraden stets einander gleich sind.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich leicht beweisen, dass ein zwischen den Grenzflächen der ellipsoidischen Schale mit gleichförmiger Dichte k ausgebreitetes, nach dem Newton'schen oder Coulomb'schen Gesetze wirkendes Agens auf eine im Punkte P angenommene Quantität desselben Agens keinen Antrieb ausübt oder, mit anderen Worten, dass das Potential innerhalb der inneren Grenzfläche der ellipsoidischen Schale constant ist.

Um dies zu zeigen, bevor wir auf die daraus sich ergebenden Folgerungen eingehen, denken wir uns den ganzen von der äusseren Grenzfläche umschlossenen Raum in Elementarpyramiden von unendlich kleiner Oeffnung zerlegt, deren Spitzen im Punkte P zusammentreffen und deren Seiten demnach durch unendlich viele, im Punkte P sich schneidende Gerade wie: $A'B'$, $a'b'$ u. s. w. gebildet werden. Von je zwei solchen Elementarpyramiden $B'b'P$ und $A'a'P$ entfallen die gegenüberliegenden Theile $B'b'Bb$ und $A'a'Aa$ auf die ellipsoidische Schale und zwar in der Art, dass ihre Wirkungen auf den Punkt P sich gegenseitig aufheben. Denkt man sich nämlich um den Punkt P concentrische Kugelschalen gelegt, deren Radien r um dr zunehmen, so werden dadurch die paarweise gegenüberliegenden Ausschnitte der ellipsoidischen Schale in sphärisch begrenzte Elemente mn von der Dicke dr, wie die Figur andeutet, zerlegt. Bezeichnet man das der Oeffnung einer Elementarpyramide entsprechende Element einer Kugeloberfläche vom Radius 1 mit $d\omega$, so wird eines der Elemente mn das Volum $r^2 d\omega dr$ haben und sonach auf den Punkt P mit Rücksicht auf die Dichte k des Agens die Wirkung $k d\omega dr$ ausüben. Die Wirkung des ganzen Ausschnittes $B'b'Bb$ wird demnach dem Ausdrucke $k d\omega \int_{PB}^{PB'} dr = k d\omega BB'$ entsprechen und die entgegengesetzte Wirkung des gegenüberliegenden Ausschnittes dem Ausdrucke $k d\omega AA'$, welche beide Ausdrücke

nach dem vorher Gesagten einander gleich siud, wesshalb sich eben die in Rede stehenden Wirkungen aufheben. Da dasselbe von je zwei gegenüberliegenden Ausschnitten der ellipsoidischen Schale Geltung hat, so wird auch deren Gesammtwirkung auf jeden in ihrer Höhlung gelegenen Punkt Null sein. Denkt man sich daher auf einem isolirten ellipsoidischen Leiter eine elektrische Schichte von gleichförmiger Dichte in der Art gelagert, dass sie eine solche von ähnlichen ellipsoidischen Oberflächen begrenzte Schale bildet, so wird sich dieselbe im Gleichgewichte befinden, nämlich das Potential in allen Punkten des Leiters constant sein. Legt man an zwei correspondirende Punkte M und M' der concentrischen Ellipsoide Berührungsebenen, deren Abstände ON und ON' vom Centrum beziehungsweise p und p' sein mögen, so wird $p' - p = \alpha p$ offenbar die Dicke $ON' - ON = MC = \varepsilon$ der elektrischen Schichte beim Punkte M angeben, somit der Ausdruck $k\varepsilon = k\alpha p$ die Flächendichte daselbst; diese ist demnach, da $k\alpha$ für alle Punkte M constant ist, den Abständen p der betreffenden Berührungsebenen vom Centrum proportional. Sie wird an den Endpunkten der grössten Hauptaxe am grössten ausfallen. Specialisiren wir die Betrachtung durch deren Uebertragung auf ein Rotationsellipsoid und denken wir uns ein solches von sehr langgestreckter Form, d. i. von sehr grosser Excentricität, so wird bei solcher Gestalt eines Leiters die Flächendichte an den Enden der grossen Axe einen sehr grossen Betrag erreichen. Durch Vergrösserung der Excentricität können wir auf diese Art der Spitzenform immer näher kommen und auf diesem Wege nachweisen, dass die Flächendichte dabei in's Unendliche wächst. Bei einem nicht vollkommen isolirten Leiter, wie es stets der Fall ist, wenn Luft denselben umgibt, wird allerdings, schon bei nicht sehr grosser Flächendichte einer weiteren Zunahme derselben durch Elektricitätsverluste an die Luft (Ausströmen der Elektricität) eine nicht zu überschreitende Grenze gesetzt sein.

(**Experimentelle Nachweisung des Sitzes der Elektricität auf der Oberfläche.**) Den von der Theorie geforderten unelektrischen Zustand des Innern eines Leiters hat man in verschiedener Weise experimentell zu constatiren versucht. Zu den diesem Zwecke dienenden Apparaten gehören namentlich die Kugel mit cylindrischer Höhlung, dann die Kugel mit zwei

halbkugelförmigen Schalen zum Aufsetzen und Abheben, der Faraday'sche Kegel, der Faraday'sche Würfel u. s. w. Bezüglich der Kugel mit cylindrischer Höhlung hat schon J. Müller bemerkt, dass sich bei der Sondirung mit dem Probescheibchen im Innern stets Spuren von Elektricität finden lassen, und V. Pierre hat ganz richtig hervorgehoben, dass man in diesem Falle in der That nicht im Innern, sondern vielmehr an der äusseren Oberfläche des Leiters sondirt, wenngleich an Stellen, wo die Flächendichte nachweislich sehr gering sein muss. Aehnliches gilt von den anderen der genannten Apparate, insofern auch bei diesen Punkte, welche im mathematischen Sinne innerhalb der Oberfläche des leitenden Materiales liegen, der Untersuchung unzugänglich sind. Bequemer als der Faraday'sche Würfel (derselbe bestand aus beiderseits mit Stanniol belegten Papierwänden von mehr als 3 Meter Seitenlänge, wurde von aussen mit Elektricität geladen und im Innern elektroskopisch untersucht) und dem Zwecke der Demonstration mit grosser Vollkommenheit entsprechend ist das Elektroskop von E. Mach, welches man im sechsten Bande von Carl's Repertorium der Physik beschrieben findet.

(**Ladung und Flächendichte auf Spitzen.**) Zu einem Ausdrucke für die Flächendichte auf Spitzen führt auch folgende Untersuchung.*) Wir denken uns (Fig. 125) einen beliebig gestalteten Leiter L durch einen sehr dünnen und langen Draht D mit einer Kugel K vom Radius r verbunden und das ganze leitende System mit einer Elektricitätsmenge Q beladen, von welcher wir die auf den Draht entfallende Menge vernachlässigen, während die auf die Kugel

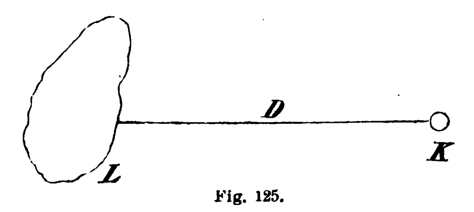


Fig. 125.

K und den Leiter L entfallenden Antheile beziehungsweise q_1 und q_2 heissen sollen, so dass $Q = q_2 + q_1$ angenommen ist. Wir nehmen den Draht von solcher Länge an, dass die Anordnung der Elektricitätsmenge q_1 auf der Kugel genau so erfolgt, wie sie stattfinden würde, wenn die Kugel allein vor-

*) Vergl. Wüllner, Experimentalphysik.

handen wäre, also unbeeinflusst vom Leiter L und der geringen Elektricitätsmenge auf dem dünnen Drahte D. Es wird Gleichgewicht bestehen, wenn auf dem ganzen leitenden Systeme derselbe Potentialwerth V sich eingestellt hat, welchen wir ebensowohl durch Aq_2 als durch aq_1 ausdrücken können, wenn A und a beziehungsweise die Potentialwerthe bedeuten, welche den Ladungen $q_2 = 1$ und $q_1 = 1$ entsprechen würden. Die Gleichgewichtsbedingung lässt sich daher durch

$$V = Aq_2 = aq_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 312)$$

ausdrücken, woraus mit Rücksicht auf $q_2 = Q - q_1$

$$q_1 = \frac{A}{A + a} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 313)$$

hervorgeht oder, weil a als Kugelpotential für die Ladung 1 offenbar gleich $\frac{1}{r}$ ist,

$$q_1 = \frac{Ar}{Ar + 1} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 314)$$

Denkt man sich nun die Kugel K immer kleiner werdend, also ihren Radius r in's Unendliche abnehmend, so wird sich die Ladung q_1 dem Grenzwerthe AQr nähern und somit selbst in's Unendliche abnehmen. Dagegen wird die entsprechende Flächendichte $h_1 = \frac{AQr}{4\pi r^2}$ durch den Ausdruck

$$h_1 = \frac{AQ}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 315)$$

angegeben werden, welcher zeigt, dass diese Flächendichte durch Verkleinerung der Kugel in's Unendliche vergrössert wird. Denkt man sich daher die Kugel auf einen unmessbar kleinen Radius reducirt, wodurch man dem Falle nahe kommt, dass der mit dem Leiter L verbundene Draht D bei K in eine Spitze ausläuft, so wird die Flächendichte auf derselben sehr gross sein müssen.

(**Physikalische Erläuterungen des Potentialbegriffes.**) Erwägen wir noch den Fall, es wäre der Kugelradius $r = 1$, so ergäbe sich für das Potential V auf der Kugel und somit auch auf dem Leiter L der Werth $V = q_1$. Es ergibt sich hieraus, dass man den Potentialwerth V auf einem Leiter L auch als die Elektricitätsmenge definiren kann, auf einer mit dem besagten Leiter durch einen langen dünnen Draht verbundenen

Kugel vom Radius 1. Wir wollen dieser Definition*) noch ein paar andere hinzufügen, welche geeignet sein dürften, die physikalische Bedeutung des Potentials an Beispielen zu erläutern.

Wir betrachten die Anziehung des Erdkörpers von der Masse Q auf die im Abstande $OM = \varrho$ (Fig. 126) vom Erdmittelpunkte angenommene Masseneinheit, eine Anziehung, deren Betrag nach dem Vorhergehenden durch den Differentialquotienten $\frac{Q}{\varrho^2}$ des Potentials $\frac{Q}{\varrho}$ (Formel 292) ausgedrückt wird. Bewegt sich nun die Masseneinheit unter dem Einflusse dieser Kraft in einem Zeitdifferentiale durch das Wegelement $d\varrho$, welches wir, insofern es eine Abnahme der Entfernung ϱ ausdrückt, negativ in Rechnung bringen wollen, so erscheint $-\frac{Q}{\varrho^2}\,d\varrho$ als das entsprechende Arbeitselement der auf die Masseneinheit ausgeübten Erdanziehung. Stellen wir uns vor, die Masseneinheit bewege sich unter der Einwirkung der Erdanziehung aus einer unendlichen Entfernung bis an die Erdoberfläche, so wird die von der Anziehung dabei verrichtete Gesammtarbeit L ausgedrückt werden durch

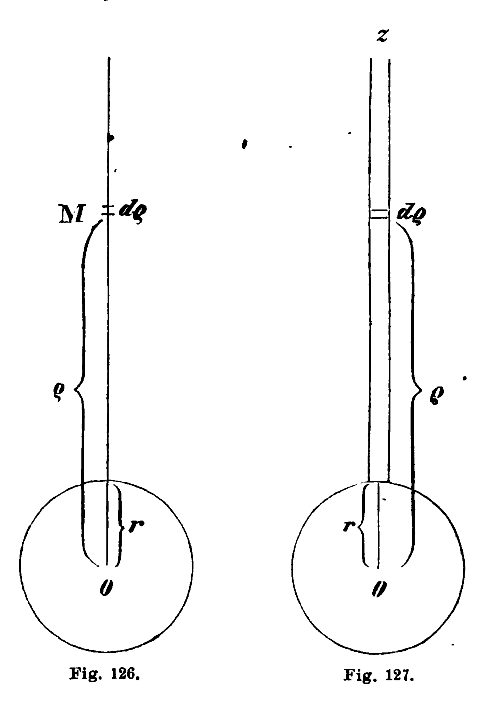


Fig. 126. Fig. 127.

$$L = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{\varrho^2}\,d\varrho = \frac{Q}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 316)$$

Wir entnehmen hieraus, dass das Potential der Erde auf einen Punkt der Oberfläche dem eben definirten Arbeitswerthe

*) Vergl. Tait, sketch of thermodynamics §. 110.

gleichkommt, oder vermöge des Principes der lebendigen Kraft (Formel 49 der Mechanik) auch der lebendigen Kraft, welche die Masseneinheit durch die in unendlicher Entfernung mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 begonnene Fallbewegung bis zur Erdoberfläche erlangen würde.

Noch anschaulicher ist vielleicht folgende Darstellung des Potentials der Erde auf einen Punkt der Oberfläche. Man denke sich (Figur 127) auf der Erdoberfläche eine verticale cylindrische oder prismatische, mit Wasser gefüllte Röhre von solchem Querschnitte errichtet, dass ein Stück von der Länge 1 derselben eine Wassermasse = 1 enthält, somit ein Stück von der Länge $d\varrho$, welches wir zunächst betrachten wollen, eine Masse vom Betrage $d\varrho$, die in der Entfernung ϱ vom Erdmittelpunkte mit einer Kraft $= \frac{Q\,d\varrho}{\varrho^2}$ angezogen wird. Denkt man sich das Rohr von unendlicher Länge, so wird der gesammte Wasserdruck P auf die Basis an der Oberfläche durch das Integral

$$P = \int_r^\infty \frac{Q\,d\varrho}{\varrho^2} = \frac{Q}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 317)$$

dargestellt werden, also eben durch das Potential der Erde auf einen Punkt ihrer Oberfläche.

Dächte man sich das Rohr von einer sehr grossen endlichen Länge, z. B. bis zu einer Entfernung von 1000 Erdhalbmessern, vom Erdmittelpunkte aus gerechnet, hinausreichend (in welcher Entfernung die Masse eines Kilo nach dem Gravitationsgesetze nur mehr das Gewicht eines Milligramms haben würde), so wäre am Ende dieses Rohres der Potentialwerth gleich $\frac{Q}{1000\,r}$, um welchen Betrag also der Gesammtdruck auf die Erdoberfläche kleiner wäre als bei unendlicher Länge des Rohres. Der Druck einer Wassersäule von der bezeichneten endlichen Höhe wäre also ein bis auf $\frac{1}{10}$ Procent genauer Näherungswerth für das Potential der Erde auf einen Punkt der Oberfläche.

(**Résumé.**) Die bisher vorgetragenen Lehrsätze der Potentialtheorie lassen sich vornehmlich auf drei Haupttheoreme zurückführen, deren erstes die Bedeutung des ersten Differentialquotienten des Potentials, das zweite das Princip der Niveau-

flächen und das dritte die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten des Potentials zum Gegenstande hat. Ein viertes Haupttheorem ist der Lehrsatz von Green, dessen wir bereits früher erwähnten, bei Aufstellung der Formeln 310 und 311

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi h \text{ und } -\int \frac{dV}{dn} d\sigma = 4\pi Q,$$

welche Formeln sich durch Specialisirung des Green'schen Theoremes, welches in seiner ganzen Allgemeinheit eigentlich ein rein mathematischer Lehrsatz ist, ergeben. Bevor wir zu den Anwendungen dieser Formeln übergehen, schalten wir die Ableitung des Green'sehen Satzes ein.

(**Theorem von Green.**) Es sei $U = F(x, y, z)$ eine beliebige Function der Raumcoordinaten und $V = f(x, y, z)$ eine gleichfalls beliebige, jedoch andere Function der Raumcoordinaten.

Ohne von vornherein unter V speciell das Potential zu verstehen, wollen wir doch die bereits eingeführte Bezeichnung $\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ für die Summe der zweiten Differentialquotienten dieser Function beibehalten. Dies vorausgeschickt, untersuchen wir das dreifache Integral

$$\int\int\int U \varDelta V \, dx\, dy\, dz = \int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz$$
$$+ \int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx\, dy\, dz + \int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx\, dy\, dz,$$

von dessen drei ähnlich gebildeten Theilen wir wieder zuvörderst den ersten, nämlich $\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz$ in Betracht ziehen. Nach den bekannten Regeln der Integralrechnung*) ist $\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz = \int dz \int dy \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx$, wofür wir behufs leichterer Uebersichtlichkeit der folgenden Entwickelungen schreiben wollen $\int\int dy\, dz \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx$, durch welche Schreibweise wir uns vorbehalten, die doppelte Integration bezüglich zweier Richtungen y und z, sobald es uns zweckdienlich scheint, in eine einfache Integration bezüglich einer

*) Einleitung, Formel 78.

Fläche, nämlich durch Einführung des Flächendifferentials $dy\,dz = d\omega$ übergehen zu lassen.

Wir führen zuerst die Integration in Bezug auf x aus, indem wir dabei U als eine Function $\varphi(x)$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx$ als das Differentiale $d\psi(x)$ einer Function $\psi(x)$ von x betrachten, während wir y und z vorderhand als constant ansehen. Wir vollziehen das Verfahren der theilweisen Integration*) im Sinne der Formel $\int \varphi(x)\,d\psi(x) = \varphi(x)\,\psi(x) - \int \psi(x)\,d\varphi(x)$. Wir erhalten dadurch: $\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx = U\frac{\partial V}{\partial x} - \int \frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial x}\,dx$, indem an die Stelle von $d\varphi(x)$ in der allgemeinen Formel der Ausdruck $\frac{\partial U}{\partial x}\,dx$ zu stehen kommt. Es ergibt sich auf diese Art durch unmittelbare Substitution

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz \left[U\frac{\partial V}{\partial x} - \int \frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\right]$$

Um den bisher ganz allgemein gehaltenen Entwickelungen Anhaltspunkte für eine bestimmte Vorstellung von deren Be-

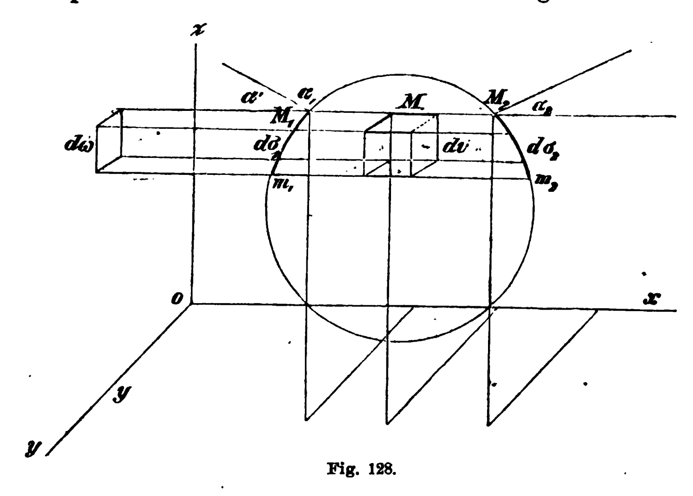


Fig. 128.

deutung zu geben, wollen wir weiterhin voraussetzen, dass die Coordinaten x, y, z einem beliebigen Volumselemente dv (Fig. 128) eines durch eine geschlossene Fläche begrenzten

*) Einleitung, Formel 70.

Raumes angehören sollen.*) Die bei constant angenommenen y und z ausgeführte Integration nach x erhält dann die Bedeutung einer Summirung für alle Volumselemente dv, welche in einem zur Abscissenaxe parallelen Elementarprisma M_1, m_1, M_2, m_2 enthalten sind, wenn wir eben die Integration innerhalb der Grenzen x_1 und x_2 ausführen, die den Punkten M_1 und M_2 an den Endflächen des betrachteten Elementarprismas entsprechen. Dieses bestimmte Integral können wir durch

$$\left[\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\right]$$

ausdrücken, wenn wir unter den mit den Stellenzeigern x_2 und x_1 versehenen eingeklammerten Ausdrücken die Substitutionswerthe in dem Theile $U\frac{\partial V}{\partial x}$ des allgemeinen Integrales verstehen, welche sich durch Einsetzung der Grenzen x_2 und x_1 für x ergeben.

Wir dehnen nun die Integration auf y und z aus und erhalten auf diese Art:

$$\iiint U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint dy\,dz\left[\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\right]$$

$$= \iint\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} dy\,dz - \iint\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} dy\,dz$$

$$- \iint\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\ {}^{**)}$$

Beachten wir nun, dass $dy \cdot dz$ in den beiden ersten Inte-

*) Der Ausdruck $\iiint U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz = \int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv$ bedeutet dann, dass man jedes dv mit dem seinen Coordinaten entsprechenden $U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ zu multipliciren und die Summe aller dieser Producte zu bilden habe.

**) Wir deuten hier keine Integrationsgrenzen für y und z an, weil wir sofort die Differentialien $dy.\ dz = d\omega$ und $dx.\ dy.\ dz = dv$ einführen.

gralen ein Flächenelement $d\omega$ (Projection des Raumelementes dv auf die yz-Ebene) und $dx \cdot dy \cdot dz$ im dritten Integral ein Raumelement dv darstellt, so können wir den vorstehenden Ausdruck auch auf die Form

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x_2} d\omega - \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x_1} d\omega - \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dv$$

bringen und erhalten demnach

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz$$

$$= \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x_2} d\omega - \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x_1} d\omega - \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dv.$$

Wir kehren nun zur Betrachtung der Figur zurück und bemerken, dass das zur x-Axe parallele Elementarprisma aus der geschlossenen Fläche beiderseits Flächenelemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ ausschneidet, deren jedes das vorhin betrachtete Flächenelement $d\omega$ auf der yz-Ebene zur Projection hat, welche Projection wir finden, indem wir das projicirte Flächenelement mit dem Cosinus des Winkels multipliciren, welchen die Normale des Flächenelementes mit der x-Axe einschliesst. Wir erhalten dadurch zwei gleichbedeutende Ausdrücke für $d\omega$, je nachdem wir das Flächenelement $d\sigma_1$ oder $d\sigma_2$ in's Auge fassen, nämlich $d\omega = d\sigma_2 \cos\alpha_2 = d\sigma_1 \cos\alpha'$, oder indem wir für α' seinen Nebenwinkel α_1 einführen, $d\omega = d\sigma_2 \cos\alpha_2 = - d\sigma_1 \cos\alpha_1$ Setzen wir nun für $d\omega$ im ersten Theile des Integrals den ersten und im zweiten Theile des Integrals den zweiten Werth ein, so erhalten wir:

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x_2} d\sigma_2 \cos\alpha_2$$

$$+ \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x_1} d\sigma_1 \cos\alpha_1 - \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dv$$

Denken wir uns nun die Rechnung auf alle der x-Axe parallelen Elementarprismen ausgedehnt, so haben die beiden ersten Theile des Integrals, welche sich für diese sämmtlichen Elementarprismen ergeben, zusammengenommen offenbar die Bedeutung, dass für sämmtliche Elemente der geschlossenen Fläche der Ausdruck $U \frac{\partial V}{\partial x}$ zu bilden und mit dem betreffenden $d\sigma \cos\alpha$ zu multipliciren ist. Die Summe dieser Grössen entspricht dann dem über die ganze Oberfläche ausgedehnten

Integrale $\int U \frac{\partial V}{\partial x} d\sigma \cos\alpha$, während man sich den dritten Theil des oben entwickelten Integrals, nämlich $\int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dv$, auf alle Raumelemente dv des von der Fläche eingeschlossenen Volums erstreckt zu denken hat, nämlich als die Summe der mit den einzelnen dv multiplicirten Werthe von $\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x}$. Wir erhalten auf diese Art den Ausdruck:

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int U \frac{\partial V}{\partial x} d\sigma \cos\alpha - \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dv$$

und durch analoge Schlussfolgerungen bezüglich y und z die ähnlichen Ausdrücke;

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx\, dy\, dz = \int U \frac{\partial V}{\partial y} d\sigma \cos\beta - \int \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} dv$$

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx\, dy\, dz = \int U \frac{\partial V}{\partial z} d\sigma \cos\gamma - \int \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} dv$$

deren Summe den ursprünglich gesuchten Integralwerth

$$\iiint U \varDelta V\, dx\, dy\, dz$$

geben muss, in welchen wir nun auch das Raumelement dv für $dx\, dy\, dz$ einführen wollen. Dadurch entsteht die Gleichung:

$$\int U \varDelta V\, dv = \int U \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cos\gamma\right] d\sigma$$
$$- \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z}\right] dv$$

Nennen wir endlich dn ein Element der Normale des in Betracht gezogenen Flächenelementes, so können wir für die drei Richtungscosinus folgende Werthe einsetzen:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dn};\ \cos\beta = \frac{dy}{dn};\ \cos\gamma = \frac{dz}{dn}.$$

In Folge dessen nimmt obige Gleichung die Gestalt an:

$$\int U \varDelta V\, dv = \int U \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dn}\right] d\sigma$$
$$- \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z}\right] dv.$$

In dem Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen bedeutet

das erste eingeklammerte Trinom offenbar den totalen Differentialquotienten $\frac{dV}{dn}$ der Function V in der Richtung der Normale, wesshalb wir schliesslich zu folgendem Resultate gelangen:

$$\int U \triangle V dv = \int U \frac{dV}{dn} d\sigma - \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right] dv . \quad 318)$$

als Ausdruck des Theorems von Green.

Dabei ist angenommen, dass das Differentiale dn der Flächennormale stets nach aussen als positiv gerechnet wird. Macht man, wie es z. B. bei Green selbst vorkommt, die gegentheilige Annahme, das heisst, rechnet man die Normalen nach einwärts als positiv, so erhält $\int U \frac{dV}{dn} d\sigma$ das entgegengesetzte Vorzeichen.

Aus dem Green'schen Theorem ergeben sich mehrere sehr wichtige Folgesätze, indem man über die Bedeutung der Functionen U und V bestimmte Annahmen macht.

(**Erster Folgesatz.**) Es sei z. B. unter V das Potential verstanden, während U constant nnd zwar $= 1$ sein möge. Wir erhalten dann $\int \triangle V dv = \int \frac{dV}{dn} d\sigma$ (der zweite Theil des Ausdruckes rechts vom Gleichheitszeichen in Formel 318 wird wegen $U =$ Const. Null). Mit Rücksicht auf $\triangle V = -4\pi k$ (Formel 297) erhält die Gleichung die Gestalt:

$$-4\pi \int k dv = \int \frac{dV}{dn} d\sigma$$

wobei k die Dichte des im Raumelemente dv vorhandenen Agens und somit kdv ein Element dq desselben bedeutet. Dadurch wird $\int k \cdot dv = \int dq = Q$ werden, nämlich gleich der Menge des in der geschlossenen Fläche enthaltenen Agens. Wir kommen auf diese Art zu dem Ausdrucke:

$$\left. \begin{array}{c} -4\pi Q = \int \frac{dV}{dn} d\sigma \\ \text{oder} \\ -\int \frac{dV}{dn} d\sigma = 4\pi Q \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad 319)$$

ein Ergebniss, welches wir für den speciellen Fall der Kugel bereits oben (Formel 311) erhalten haben.

Aus diesem Folgesatze ergibt sich sofort ein anderer, den wir für den speciellen Fall einer Kugel auch schon früher kennen lernten und nunmehr allgemein beweisen wollen.

Es sei L (Fig. 129) ein beliebiger Leiter, auf welchem sich eine elektrische Schichte im Gleichgewichte befindet; es ist dann die Oberfläche S des Leiters, von welcher $d\sigma$ ein Element sein soll, eine Niveaufläche.

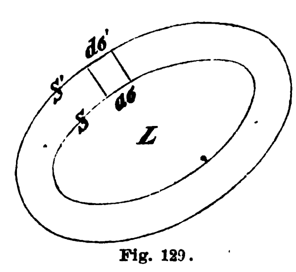


Fig. 129.

Man betrachte nun eine andere Niveaufläche S', welche den Leiter einschliesst, und deren Elemente wir mit $d\sigma'$ bezeichnen wollen. Auf diese letztere Fläche wende man nun das Theorem 319 an. Es ist sofort $-\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma' = 4\pi Q$, wobei offenbar die vorhin erwähnte elektrische Schichte auf dem Leiter L die von S' eingeschlossene Menge Q ist, folglich nach Formel 304, $Q = \int h\,d\sigma$, wenn h die Flächendichte der Elektricität auf dem Leiter L vorstellt. Man denke sich nun im Umfange von $d\sigma$ Normalen oder vielmehr orthogonale Trajectorien errichtet, welche an der äusseren Fläche ein correspondirendes Element $d\sigma'$ ausschneiden, so besteht offenbar die auf diese correspondirenden Flächenelemente bezügliche Relation $-\frac{dV}{dn}\,d\sigma' = 4\pi h\,d\sigma$;*) — denkt man sich endlich S' unendlich nahe an S gelegt, wobei dann $d\sigma'$ das $d\sigma$ zur Grenze hat, so wird

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 320)$$

die mit Beziehung auf die Kugel bereits unter 310 angeführte und nunmehr als allgemein giltig nachgewiesene Formel. Ihre Bedeutung lässt sich auch in dem Satze aussprechen: die 4πfache Flächendichte in einem Punkte einer elektrischen Schicht ist gleich der auf die Quantitätseinheit in diesem Punkte wirkenden Kraft. (Diese wird nämlich nach der Theorie der Niveauflächen durch $-\frac{dV}{dn}$ vorgestellt.)

Der Satz 319 erfährt eine für spätere Anwendungen wich-

*) Wie aus $-\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma' = 4\pi\int h\,d\sigma$ durch Differentiation unmittelbar hervorgeht.

tige Specialisirung, wenn wir uns denselben auf eine geschlossene Fläche S (Fig. 129) angewendet denken, innerhalb oder ausserhalb welcher sich ein mit der elektrischen Quantität $\mu = 1$ begabter Punkt P befindet, während sonst keine Elektricität vorhanden sei. In beiden Fällen stellt dann $\frac{1}{r}$ offenbar das vom elektrischen Punkte P herrührende Potential V am betrachteten Flächenelemente $d\sigma$ vor. Man hat daher in diesen beiden Fällen $V = \frac{1}{r}$ in die vorstehende Formel 319 einzusetzen, während andererseits die von der Fläche S eingeschlossene Elektricitätsmenge Q entweder $= 1$ oder $= 0$ sein wird, je nachdem die allein vorhandene Quantität $\mu = 1$ des Punktes P innerhalb oder ausserhalb der besagten Fläche sich befindet. Man erhält demnach die weiteren Formeln

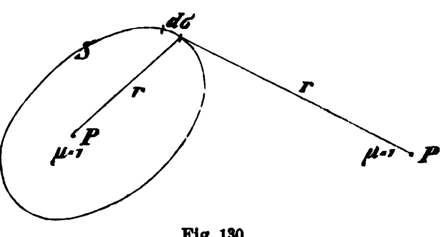


Fig. 130.

$$-\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 4\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 321)$$

wenn P innerhalb der Fläche S liegt und

$$-\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 322)$$

wenn P ausserhalb der Fläche S liegt.

Dieses Ergebniss hat übrigens, wie das Green'sche Theorem in seiner ursprünglichen Allgemeinheit selbst, die Bedeutung einer rein geometrischen Relation, deren Giltigkeit von der Unterstellung physikalischer Annahmen ganz unabhängig ist. Die Annahme einer im Punkte P vorhandenen nnd zwar allein vorhandenen Quantitätseinheit, von welcher ein durch $\frac{1}{r}$ ausgedrückter Potentialwerth herrührt, war nur ein Kunstgriff bei der Ableitung der soeben gewonnenen Formeln und kann weiterhin wieder fallen gelassen werden.

(**Zweiter Folgesatz.**) Das Integral

$$\int \left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right] dv$$

in der Green'schen Formel 318 hat die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wenn man U für V setzt und umgekehrt. Es ist demnach, wie im Falle dieser Vertauschung aus Formel 318 unmittelbar folgt

$$\int U\frac{dV}{dn}d\sigma - \int U\triangle V dv = \int V\frac{dU}{dn}d\sigma - \int V\triangle U dv$$

wobei ΔU ganz analog mit ΔV die Bedeutung hat

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Man kann daher das Green'sche Theorem auch in der Form schreiben:

$$\int\left[U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right]d\sigma = \int U\triangle V dv - \int V\triangle U dv \quad . \quad 323)$$

Verfügt man ferner über die Bedeutung der Function U in der Art, dass man $U = \frac{1}{r}$ setzt, indem man sich r als den Abstand eines bestimmten Punktes P von dem betrachteten Flächenelemente $d\sigma$ oder Raumelemente dv vorstellt, so ergibt sich der weitere speciellere Lehrsatz

$$\int\left[\frac{1}{r}\frac{dV}{dn} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right]d\sigma = \int\frac{1}{r}\triangle V dv - \int V\triangle\frac{1}{r}\,dv \quad . \quad 324)$$

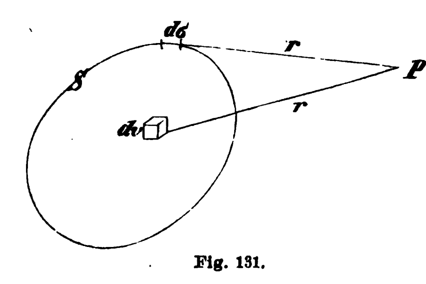


Fig. 131.

Natürlich stellt dabei V das Potential am betrachteten $d\sigma$ oder dv vor, während andererseits wieder die beiden Fälle zu unterscheiden sind, ob P innerhalb oder ausserhalb der Fläche S (Fig. 131) gelegen ist, auf welche man das Theorem 324 anwendet.

Wegen $\triangle V = -4\pi k$ kann man auch schreiben:

$$\int\left[\frac{1}{r}\frac{dV}{dn} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right]d\sigma = -4\pi\int\frac{k\,dv}{r} - \int V\triangle\frac{1}{r}\,dv$$

wobei ersichtlich ist, dass $\int\frac{k\,dv}{r}$ offenbar das Potential im Punkte P vorstellt, welches von den in der Fläche S eingeschlossenen Elektricitätsmengen herrührt, ein Potential, welches

mit V_P' bezeichnet werden soll, im Gegensatze zum Gesammtpotential V_P aller vorhandenen Elektricitätsmengen auf den Punkt P. Beschränken wir endlich noch die Betrachtung auf den Fall, dass P ausserhalb S liegt und also $\frac{1}{r}$ nicht für gewisse Raumelemente dv unendlich wird, so können wir im Ausdrucke $-\int V \triangle \frac{1}{r}\, dv$ nach Formel 38 der mathematischen Einleitung $\triangle \frac{1}{r} = 0$ setzen und erhalten dann einen dritten, noch specielleren und nur für einen äusseren Punkt P giltigen Lehrsatz, welcher lautet

$$\int \left[\frac{1}{r} \frac{dV}{dn} - V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right] d\sigma = -4\pi V_P' \quad . \quad . \quad 325)$$

Diese Folgesätze gestatten eine Reihe sehr wichtiger und interessanter Anwendungen, insbesondere auf Leiter, welche andere elektrische Körper (z. B. andere mit Elektricität behaftete Leiter oder elektrische Nichtleiter) umschliessen oder auch leere Hohlräume enthalten. Wir wollen diese Anwendungen sofort besprechen, dabei aber durchwegs voraussetzen, dass zwischen allen innerhalb oder ausserhalb der betrachteten Leiter vorhandenen Elektricitäten Gleichgewicht bestehe.

(Verhalten eines Leiters, welcher elektrische Körper einschliesst.) Man stelle sich einen Leiter L (Fig. 132) vor, welcher einen oder mehrere leitende oder nicht leitende Körper einschliesst, welche mit Elektricitätsmengen q_1, q_2, $q_3 \ldots$ behaftet sind, während die an der inneren Grenzfläche S_1 haftende Elektricitätsmenge Q_1 heissen mag. Man denke sich nun in der Wand des hohlen Leiters eine (in der Zeichnung punktirt angedeutete) geschlossene Fläche S gelegt und auf diese die Formel 319 (oder 311) angewendet. Da bei dem vorausgesetzten elektrischen Gleichgewichte das Potential innerhalb der Masse des Leiters constant, somit $\frac{dV}{dn} = 0$ ist, ergibt sich für diesen Fall

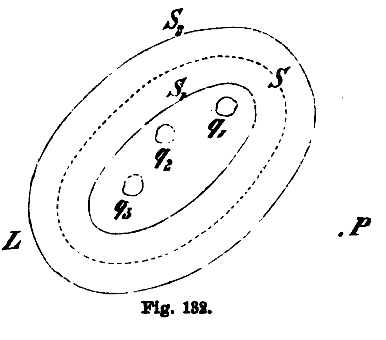


Fig. 132.

$$-\int \frac{dV}{dn} d\sigma = 4\pi Q = 0$$

folglich $Q = 0$; es ist aber offenbar die eingeschlossene Elektricitätsmenge $Q = Q_1 + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$ somit

$$Q_1 + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 326)$$

Wir sehen hieraus, dass die von einem Leiter eingeschlossenen elektrischen Mengen stets **die algebraische Summe Null geben.**

Dies würde z. B. bei einer vollkommenen Leydener Flasche zutreffen. Eine solche wäre gegeben, wenn beide Belegungen geschlossene Flächen wären, deren eine (innere Belegung) von der anderen (äusseren Belegung) eingeschlossen wird. Die Ladung der inneren Belegung mit der an der inneren Grenzfläche der äusseren Belegung haftenden Elektricität zusammengenommen, müsste dann auch die algebraische Summe Null geben.

Wären ursprünglich ausser den elektrischen Quantitäten q keine vorhanden und der Leiter L unelektrisch gewesen, so würde in Folge elektrischer Influenz an der inneren Grenzfläche des Leiters eine Elektricitätsmenge $Q_1 = -(q_1 + q_2 + q_3 \cdots)$ und eine gleichgrosse entgegengesetzte $Q_2 = q_1 + q_2 + q_3 \cdots$ an der äusseren Grenzfläche sich gebildet haben.

(**Fortsetzung.**) Denkt man sich ausserhalb des betrachteten Leiters (Fig. 132) einen Punkt P und untersucht das Potential V_P' daselbst, welches von den vorhin besprochenen eingeschlossenen Elektricitätsmengen $Q_1, q_1, q_2, q_3, \cdots$ herrührt, so gibt Formel 325 des zweiten Folgesatzes

$$\int \left[\frac{1}{r} \frac{dV}{dn} - V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right] d\sigma = -4\pi V_P'$$

darüber Aufschluss. Da die Fläche S, auf die wir auch diesen Satz anwenden wollen, indem wir unter $d\sigma$ Elemente dieser Fläche verstehen, innerhalb der Masse des Leiters liegt, woselbst das Potential einen constanten Werth V_1 hat und wie bekannt $\frac{dV}{dn} = 0$ ist, so gestaltet sich vorstehende Formel für diesen Fall folgendermassen:

$$-V_1 \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -4\pi V_P'$$

Weiterhin kann hier, da man es mit einem äusseren Punkte zu thun hat, Formel 322 angewendet werden, nämlich

$$-\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 0,$$

wenn letztere Formel eben auch auf jene Fläche S mit Bezugnahme auf jenen ausserhalb derselben liegenden Punkt P angewendet wird.

Man erhält sonach schliesslich

$$V_P' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 327)$$

d. h. die vom betrachteten Leiter eingeschlossenen Elektricitäten geben für einen äusseren Punkt ein Potential, welches constant und zwar gleich Null ist; sie üben also nach aussen keine Fernwirkung aus. Auch dies trifft bei einer vollkommenen Leydener Flasche zu. Denkt man sich dieselbe geladen und die Elektricität Q_2 von der äusseren Grenzfläche der äusseren Belegung abgeleitet, so verhält sie sich nunmehr wie ein vollkommen unelektrischer Körper; sie würde in diesem Zustande am empfindlichsten Elektroskope keine Elektricitätsanzeige bewirken, denn die von der äusseren Belegung eingeschlossenen Ladungen üben nach aussen keine Wirkung aus. Fassen wir beide Resultate zusammen, so können wir sagen, dass die von einem Leiter eingeschlossenen Elektricitäten zusammen die Summe Null geben und keine Fernwirkung ausüben.

(**Fortsetzung.**) Aus dem letzten Satze (Formel 327) geht hervor, dass die von einem Leiter eingeschlossenen Elektricitäten ein System bilden, welches für sich im Gleichgewichte steht, da es nach aussen keine Wirkung ausübt. Daraus folgt, dass auch die auf der äusseren Grenzfläche des Leiters etwa vorhandene Elektricität Q_2 (z. B. jene auf der Aussenfläche der äusseren Belegung einer Leydener Flasche, wenn selbe nicht ableitend berührt wurde) für sich im Gleichgewichte stehen muss, wenn ausser ihr und den eingeschlossenen Elektricitäten keine vorhanden sind. Sie muss dann eine Niveauschichte bilden, gerade so, als wenn sie sich auf einem massiven Leiter befände. Im Allgemeinen bilden nämlich die ausserhalb befindlichen Elektricitäten für sich ein Gleichgewichtssystem, welches innerhalb keine Wirkung ausübt.

Es geht aus der Natur der Sache hervor, dass eine solche

für sich im Gleichgewichte stehende Niveauschichte nur aus gleichartiger Elektricität bestehen kann.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall ausdehnen, dass mehrere Leitersysteme, wie das Fig. 132 betrachtete, gegeben wären, sämmtlich von einem andern Leiter umschlossen, auf dessen äusserer Grenzfläche sich die daselbst etwa vorhandene Elektricität ebenfalls in einer Niveauschichte anordnen müsste, wenn ausserhalb dieses Leiters keine anderen Elektricitäten vorhanden wären.

Wir wollen schliesslich noch einen Versuch anführen, der zur Erläuterung des Gesagten dient.

Es sei C (Fig. 133) ein cylindrischer Becher aus Metall, den wir uns isolirt denken wollen. Ist derselbe verhältnissmässig tief, so wird er sich einer mittelst eines isolirenden Fadens eingeführten elektrisirten Kugel K gegenüber, wenn diese bis nahe an den Boden versenkt ist, nahezu wie eine geschlossene Fläche verhalten. Die Elektricität der Kugel und die Influenzelektricität an der inneren Grenzfläche des Leiters C bilden hier das innere, nach aussen wirkungslose System, während die Influenzelektricität auf der äusseren Grenzfläche des Leiters C das ebenfalls für sich im Gleichgewichte stehende, wie wir gesehen haben, in einer Niveauschichte angeordnete äussere System bildet. Die Anordnung des letzteren wird nicht beirrt werden durch eine Aenderung in der Stellung der eingeführten Kugel, selbst wenn diese geradezu mit dem Boden des Cylinders in Berührung kommt; denn das innere System ist nach aussen wirkungslos und das äussere wird nach wie vor in derselben Weise auf ein Elektroskop E wirken, wenn wir ein solches mittelst eines Drahtes D mit dem Cylinder C in Verbindung setzen.

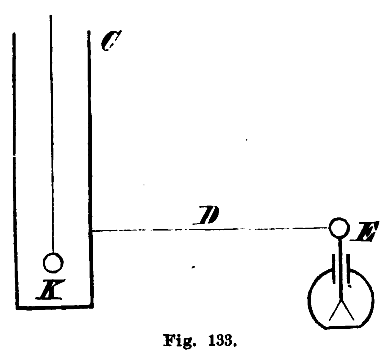


Fig. 133.

(Leiter mit leeren Hohlräumen.) Nach den bereits vorgetragenen Erörterungen über die Anordnung der Elektricität auf Leitern (siehe die Folgerungen aus Formel 301) ist klar, dass im Innern eines massiven Leiters keine Elektricität sich

befinden, sondern dieselbe nur auf der Oberfläche des Leiters sich ausbreiten kann. Denkt man sich nun, dass ein Leiter einen Hohlraum enthalte, wie z. B. eine ringsum geschlossene, metallene Schale, so entsteht die Frage, ob vielleicht auch auf der inneren Grenzfläche der Schale, nämlich auf der inneren Seite dieser Grenzfläche S_1 (Fig. 134) Elektricität vorhanden sein kann. Schliesst der Leiten elektrische Körper ein, die mit den Elektricitäten $q_1, q_2, q_3 \ldots$ behaftet sind, so wird eine solche innere Ladung

$$Q_1 = -(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots)$$

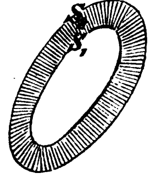


Fig. 134.

nach Formel 326 allerdings vorhanden sein, nicht aber im entgegengesetzten Falle, da die algebraische Summe der vom Leiter eingeschlossenen Elektricitäten nach dem soeben citirten Theorem stets Null sein muss. Da nun innerhalb der leitenden Masse, nämlich zwischen den Grenzflächen S_1 und S_2 aus bereits früher erläuterten Gründen (301) auch keine Elektricität sich befinden kann, so ergibt sich der Schluss, dass ein hohler Leiter, wenn er nicht elektrische Körper einschliesst, auch nur auf seiner äusseren Oberfläche eine elektrische Ladung haben kann. Das Potential im Hohlraume ist in diesem Falle, wie sich auch noch auf anderen Wegen zeigen lässt, ebenfalls constant, wie wenn der Leiter massiv wäre.

(**Theorie der Leydener Flasche.**) Wir betrachten zunächst das Verhalten elektrischer Schichten V_2, V_1 (Fig. 135) an der Oberfläche von Leitern L_2 und L_1, die einander gegenüberstehen. Es lässt sich nämlich zeigen, dass correspondirende Elemente solcher Schichten $d\sigma_2$, $d\sigma_1$, d. h. solche,

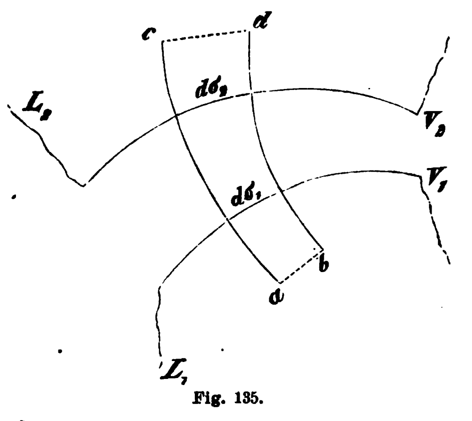


Fig. 135.

welche innerhalb eines und desselben orthogonalen Canales *abcd* liegen, mit gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen geladen sind. Wir denken uns den Zwischenraum zwischen den bezeichneten Leitern L_2 und L_1, auf welchen

wir uns die Elektricität im Gleichgewichte denken, mit einem Isolator ausgefüllt, wie es z. B. hinsichtlich der Belegungen einer Leydener Flasche, die durch eine Glasschichte getrennt sind, der Fall ist, oder auch der Fall sein würde, wenn sich zwischen beiden Leitern ein absolut leerer Raum befände. Unter der angegebenen Voraussetzung des elektrischen Gleichgewichtes sind die einander gegenüberstehenden Leiteroberflächen als Niveauflächen anzusehen, welchen gewisse Potentialwerthe V_2 und V_1 entsprechen. Wir construiren in der bereits mehrfach erörterten Weise einen orthogonalen Canal, der die vorhin erwähnten Flächenelemente $d\sigma_2$ und $d\sigma_1$ ausschneidet, über welche hinaus wir den orthogonalen Canal beiderseits fortsetzen und irgendwo innerhalb der beiden Leiter, z. B. bei *cd* und *ab* durch die daselbst punktirt angedeuteten Endflächen abschliessen. Wendet man nun auf die geschlossene Oberfläche dieses orthogonalen Canals wieder das Theorem von Green (Formel 319 oder 311) an, so wird $\frac{dV}{dn}$ für alle Theile der Oberfläche gleich Null werden; für die Mantelfläche aus dem bereits erörterten Grunde, und für die Endflächen, weil dieselben im Innern von Leitern, wo das Potential constant bleibt, gelegen sind. Wir erhalten demnach $-\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = 4\pi Q = 0$. Die hier eingeschlossene Elektricitätsmenge Q besteht aber aus den beiden Mengen $h_2 d\sigma_2$ und $h_1 d\sigma_1$, welche auf den beiden eingeschlossenen Oberflächenelementen liegen, wobei wir die betreffenden Flächendichten mit h_2 und h_1 bezeichnet haben. Es ergibt sich hieraus

$$Q = h_2 d\sigma_2 + h_1 d\sigma_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 328)$$

d. h. correspondirende Elemente elektrischer Schichten, die einander gegenüber liegen, haben gleiche und entgegengesetzte Ladungen.

Bei einer vollkommenen Leydener Flasche, d. h. bei einer solchen, deren beide Belegungen geschlossene Flächen bilden würden, müsste dieselbe Relation für die durch die Glasschichte getrennten Ladungen beider Belegungen Geltung haben.

Denken wir uns den Abstand e zwischen den beiden Flächen V_2 und V_1 sehr klein, so wird $\frac{V_2 - V_1}{e}$ dem Differentialquotienten $\frac{dV}{dn}$ nahe kommen, somit

$$-\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma_1 = -\int\frac{V_2 - V_1}{e}\,d\sigma_1 = (V_1 - V_2)\int\frac{d\sigma_1}{e}$$

werden, welche Gleichung mit Rücksicht auf $-\frac{dV}{dn} = 4\pi h$ (Formel 320 oder 310) beziehungsweise $= 4\pi h_1$ in die folgende übergeht: $4\pi\int h_1\,d\sigma_1 = (V_1 - V_2)\int\frac{d\sigma_1}{e}$. Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen stellt offenbar die 4πfache Ladung Q_1 auf der Oberfläche V_1 (z. B. auf der inneren Belegung der Leydener Flasche) vor, während wir für den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen $(V_1 - V_2)\frac{S_1}{E}$ setzen können, wenn wir $S_1 = \int d\sigma_1$ für die Flächengrösse der betrachteten Belegung setzen und unter E den mittleren Abstand beider Belegungen verstehen, wie er sich im Sinne der Methoden der Integralrechnung zur Berechnung der Mittelwerthe der Functionen ergeben würde. Es wird demnach

$$Q_1 = \frac{(V_1 - V_2)S_1}{4\pi E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 329)$$

sein.

Stellt man sich unter V_2 die äussere Belegung einer Leydener Flasche vor und setzt den gewöhnlichen Fall voraus, dass dieselbe zur Erde abgeleitet ist, so wird wegen $V_2 = 0$

$$Q_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 330)$$

Das Nullwerden des Potentials auf der abgeleiteten Belegung erklärt sich, wenn man erwägt, dass bei solcher Anordnung die abgeleitete Belegung mit dem Erdkörper zusammengenommen ein leitendes System bildet, dessen Ausdehnung wir unter den gegebenen Verhältnissen als unendlich gross ansehen können, während andererseits der Potentialwerth auf der ganzen Oberfläche dieses unendlichen Systems allenthalben gleich sein muss. Dieser Potentialwerth, bei welchem die auf den beiden Belegungen vorhandenen Elektricitätsmengen in Betracht kommen, wird daher auf der äusseren Belegung derselbe sein müssen wie an den entferntesten Punkten des Erdkörpers, mit welchem diese äussere Belegung zusammenhängt, welcher letztere Werth mit Rücksicht auf die als unendlich gross anzusehenden Werthe von r im Ausdrucke $\int\frac{dq}{r}$ offenbar gleich Null sein muss. Aus der zuletzt abgeleiteten Formel, in welcher E die Glasdicke

der Leydener Flasche, auf die wir die Formel anwenden, vorstellt, wird Folgendes ersichtlich. Denkt man sich die innere Belegung S_1 mit dem Conductor einer Elektrisirmaschine leitend verbunden, so wird im Falle des Gleichgewichtes der Potentialwerth V_1 auf der inneren Belegung derselbe sein, wie auf dem Conductor der Maschine. Sehen wir diesen Werth als gegeben an, so wird die Ladung Q_1, welche die Leydener Flasche bei constantem Potentialwerthe V_1 auf der Maschine aufzunehmen fähig ist, desto kleiner ausfallen, je grösser die Glasdicke gewählt wird, während umgekehrt bei gleichen Ladungen Q_1 verschiedener Leydener Flaschen desto höhere Potentialwerthe (oder wie man gewöhnlich zu sagen pflegt „Spannungen") auf der inneren Belegung erzielt werden können, je grösser die besagte Glasdicke ist. Diesen Potentialwerthen ist aber eine durch die Breite des unbelegten Randes bestimmte Grenze gesetzt, da, sobald ein gewisser Potentialwerth erreicht ist (vorausgesetzt, dass derselbe vermöge der angewendeten Ladung Q_1 überhaupt erreicht werden kann), eine Selbstentladung um den unbelegten Rand der Flasche stattfindet, wenn nicht früher noch eine Durchbohrung der Glasschichte eintritt, wesshalb der erreichbare Potentialwerth andererseits auch durch die Festigkeit der besagten Glasschichte beschränkt ist. Die Erreichbarkeit sehr hoher Potentialwerthe (Spannungen) erheischt daher die Anwendung dicker Gläser mit breitem unbelegtem Rande, während zur Erzielung grosser Ladungen Q_1, wie unsere Formel zeigt, dünne Gläser zweckmässig erscheinen, wobei jedoch, da solche leicht durchbrochen werden, eine geringere Breite des unbelegten Randes nöthig ist, um durch Selbstentladungen über den Rand zu verhindern, dass Potentialwerthe erreicht werden können, welchen die Festigkeit des Glases nicht mehr widerstehen würde. — Ein instructives Beispiel, welches hierher gehört, sind die kleinen Leydener Flaschen, welche an den Holtz'schen Influenzmaschinen als sogenannte Condensatoren zur Funkenverstärkung angebracht sind. Hier kommt es darauf an, diese Leydener Flaschen in möglichst rascher Folge, also mit möglichst geringen Elektricitätsmengen, bis zur Entladung in grosser Schlagweite, also zu hohen Potentialwerthen zu laden. Man gibt ihnen daher zweckmässig Belegungen von geringer Ausdehnung bei verhältnissmässig dickem Glase und breitem unbelegtem Rande.

Zur Theorie der Leydener Flaschen gehören auch noch die Sätze, welche oben über das Verhalten von Leitern, welche elektrische Körper einschliessen, vorgetragen worden sind. Diese Sätze finden nämlich auf die äussere Belegung einer (vollkommenen) Leydener Flasche eine unmittelbare Anwendung.

(**Inhalt eines orthogonalen Canals.**) Das Theorem 319 (beziehungsweise 311) führt zu einem weiteren für die Theorie der stationären Ströme wichtigen Satze, den wir hier folgen lassen. Wir denken uns zwei Niveauflächen V_1 und V_2 (Fig. 136) und in dem Umfange eines Elementes $d\sigma_1$ der ersteren orthogonale Trajectorien errichtet, welche in ihrem weiteren Verlaufe ein correspondirendes Flächenelement $d\sigma_2$ der zweiten Niveaufläche begrenzen; — so entsteht auf diese Art ein sogenannter orthogonaler Canal, dessen beide Endflächen die besagten Flächenelemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ sind und dessen Mantelfläche von lauter orthogonalen Trajectorien gebildet wird. Dieser orthogonale Canal stellt nun auch ein von einer geschlossenen Fläche abgegrenztes Volumen dar, auf welches wir das oben citirte Theorem anwenden können, indem wir die Summe der Werthe bilden, welche $-\frac{dV}{dn}\,d\sigma$ für die einzelnen Theile der Oberfläche des orthogonalen Canals annimmt. Da normal zur Mantelfläche eine Aenderung des Potentialwerthes nicht stattfindet, indem dieselbe überall von Niveauflächen normal durchschnitten wird, so dass jede Normale zur Mantelfläche zugleich Tangente irgend einer Niveaufläche sein muss, so ist für die ganze Mantelfläche $\frac{dV}{dn}=0$. Es bleiben sonach nur die Werthe zu summiren, welche $-\frac{dV}{dn}\,d\sigma$ für die beiden Endflächen des orthogonalen Canales annimmt, nämlich $-\frac{dV}{dn}d\sigma_2$ und $-\frac{dV}{dn}\,d\sigma_1$, wenn wir die Normalen nach auswärts, also an den beiden Flächenelementen $d\sigma_2$ und $d\sigma_1$ nach entgegengesetzten Seiten hin als positiv rechnen. Nehmen wir aber nur am Flächenelemente $d\sigma_2$ die Normale nach aus-

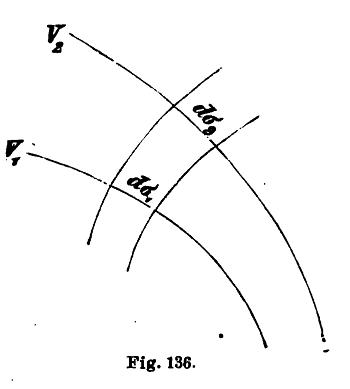


Fig. 136.

wärts, am Flächenelemente $d\sigma_1$ aber nach derselben Seite hin, also bezüglich des betrachteten Volumens nach einwärts, was wir durch Einführung der Bezeichnung n' statt n andeuten wollen, so erhalten wir $-\frac{dV}{dn}d\sigma_2$ und $+\frac{dV}{dn'}d\sigma_1$ zu summiren, wofür wir auch $-\frac{dV}{dn}d\sigma_2 - -\left(\frac{dV}{dn'}d\sigma_1\right)$ schreiben können. Mit Rücksicht auf Formel 306 und unter Voraussetzung einer Flächendichte $h=1$ stellt $-\frac{dV}{dn}d\sigma_2$ den auf $d\sigma_2$ nach der Seite der abnehmenden Potentialwerthe hin wirksamen Antrieb vor und $-\frac{dV}{dn'}d\sigma_1$ den nach derselben Seite hin wirksamen Antrieb auf $d\sigma_1$. Die vorstehende algebraische Summe bedeutet demnach die Differenz der Kräfte, welche (immer die Flächendichte $=1$ vorausgesetzt) auf die Endflächen des orthogonalen Canales nach derselben Seite hin wirken. Andererseits muss aber diese Formel der 4πfachen Menge Q des im orthogonalen Canale enthaltenen Agens gleich sein, welche Relation, nämlich

$$-\frac{dV}{dn}d\sigma_2 - \left(-\frac{dV}{dn'}d\sigma_1\right) = 4\pi Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 331)$$

demnach auch so ausgesprochen werden kann, dass die Differenz der Kräfte, welche auf correspondirende Elemente zweier Niveauflächen wirken, gleichkommt der 4πfachen Menge des Agens, welches in dem von den beiden Flächenelementen begrenzten orthogonalen Canal enthalten ist.

(**Aequivalente Anordnung eines Agens.**) Es ist leicht zu zeigen, dass die Wirkung, welche gegebene Mengen eines Agens, z. B. die Elektricitätsmengen q_1, q_2, q_3,.... (Fig. 137) ausserhalb einer sie einschliessenden Fläche S ausüben, ersetzt werden kann durch die Wirkung einer gleichen an der Oberfläche S selbst nach einem gewissen Gesetze ausgebreiteten Elektricitätsmenge. Um dies einzusehen, denke man sich um die Fläche S eine leitende Schale herumgelegt, deren äussere Grenzfläche S' (in der Zeichnung punktirt angedeutet) und deren innere Grenzfläche die gegebene

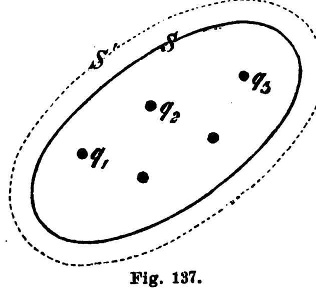


Fig. 137.

Fläche S selbst sein soll. Die eingeschlossenen Elektricitätsmengen q werden dann im Leiter Elektricitäten durch Influenz hervorrufen und zwar $Q_1 = -[q_1 + q_2 + q_3 + \cdots]$ an der inneren Grenzfläche S und $Q_2 = -Q_1$ an der äusseren Grenzfläche S'. Leitet man die letztere Elektricitätsmenge ab, so übt das System der übrig gebliebenen Elektricitätsmengen nach dem Vorhergehenden keine Wirkung aus, d. h. es wird die Wirkung des Systems der q durch die Wirkung der Schichte Q_1 compensirt. Denkt man sich daher die Schichte Q_1 aus Elektricität von entgegengesetzter Art gebildet, bei übrigens gleicher Anordnung, so wird diese nunmehr auch im Vorzeichen mit der Summe der q übereinstimmende Schichte bei der vorausgesetzten Anordnung dieselben Fernwirkungen ausüben müssen, wie das System der q selbst. Für eine bestimmte Fläche S gibt es, wie leicht einzusehen, nur eine solche äquivalente Anordnung, doch gestattet das Problem insofern unendlich viele Lösungen, als man unendlich viele Flächen S wählen kann, deren jeder eine äquivalente Anordnung entspricht. Aus der Fernwirkung eines Agens kann man daher noch nicht auf dessen Anordnung schliessen, also z. B. aus den erdmagnetischen Erscheinungen noch nicht auf die Anordnung des Magnetismus im Erdkörper.

(Potential zweier Mengen aufeinander und Potential einer Menge auf sich selbst.) Wir haben im Vorhergehenden die Potentialfunction stets unter der Voraussetzung betrachtet, dass in dem afficirten Punkte P, für welchen der in Rede stehende Potentialwerth galt, eine positive Quantitätseinheit von der Beschaffenheit des wirksamen Agens sich befinde. Dieser Begriff lässt sich erweitern. Wir können z. B. annehmen, dass in dem Punkte, für welchen wir einen gewissen Potentialwerth $V_1 = \int \frac{dq}{r}$ gefunden haben, nicht eine Quantitätseinheit, sondern z. B. eine Quantität dq_1' von einem Agens gleicher Art sich befindet. Wir können dann das Product $dq_1' \cdot V_1$ das Potential auf die Menge dq_1' nennen. Wären nebst dem Elemente dq_1' noch andere Mengen dieser Art dq_2', dq_3' u. s. f. vorhanden, sämmtlich ausserhalb des Systems der dq gelegen, und wären V_2, V_3 u. s. f. die daselbst stattfindenden vom Systeme der dq herrührenden Potentialwerthe, so gibt die Summe der auf diese Quantitäten dq' bezogenen Potentialwerthe, das heisst die Summe

der Producte der Potentialwerthe mit den betreffenden dq', nämlich $dq_1' V_1 + dq_2' V_2 + dq_3' V_3 + \cdots = \Sigma dq' V$, oder, insofern die Elemente dq' einen Raum stetig erfüllen, das Integral $\int dq' V$, jene Grösse, welche man das **Potential des Systems der** dq **auf das System der** dq' zu nennen pflegt. Wir sind auf diese Art zu dem Begriffe des Potentials zweier Mengen auf einander gelangt, für welches wir also, wenn wir die Bezeichnung W dafür wählen, den Ausdruck erhalten:

$$W = \int dq' V = \int dq' \int \frac{dq}{r} = \int\int \frac{dq' dq}{r} = \int\int \frac{dq dq'}{r} \quad . \qquad 332)$$

woraus zugleich ersichtlich ist, dass das Potential des ersten Systems auf das zweite identisch ist mit dem Potential des zweiten Systems auf das erste, da die Reihenfolge von dq und dq' auf den Werth von W ohne Einfluss ist. Man kann also auch schreiben $W = \int dq \int \frac{dq'}{r} = \int dq V'$, wenn man mit V' die vom System der dq' herrührenden Potentialwerthe auf die dq bezeichnet.

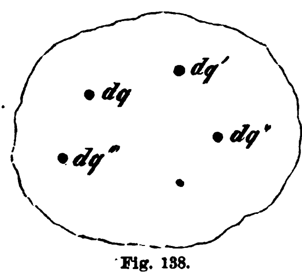


Fig. 138.

Nach dem Gesagten ist es leicht, sich den Begriff des sogenannten Potentials einer Menge auf sich selbst klar zu machen. Wir denken uns eine begrenzte Menge von einem Agens, gebildet aus den Elementen dq, dq', dq'' . . . (Fig. 138). Wir nennen das Potential dieser Menge auf die Quantitätseinheit in dem Punkte, wo sich das Element dq befindet, V, also $dq V$ das Potential der gegebenen Menge auf das Element dq selbst. An der Stelle des Elementes dq' wird ein anderer Potentialwerth V' gelten und somit $dq' V'$ das Potential der gegebenen Menge auf das Element dq' sein. In gleichem Sinne ist dann $dq'' V''$ das Potential der gegebenen Menge auf das Element dq'' u. s. f. Bilden wir nun die Summe $dq V + dq' V' + dq'' V'' + \cdots$ für alle Elemente der gegebenen Menge selbst, so erhalten wir einen Ausdruck, in welchem nicht nur jede Combination je zweier Massenelemente vorkommt, sondern jede solche Combination zweimal vertreten ist. So ist z. B. die Wechselbeziehung

zwischen den Elementen dq und dq' das eine Mal berücksichtigt, indem wir das Theilproduct $dq\,V$ bilden, weil das Potential V das Potential aller Elemente mit Ausschluss von dq ist und somit das Element dq' in sich begreift. Ein zweites Mal ist die Wechselbeziehung zwischen denselben Elementen dq und dq' berücksichtigt bei der Bildung des Theilproductes $dq'\,V'$, wobei das Potential V' das Potential aller Elemente mit Ausnahme von dq' ist und somit das Element dq in sich begreift. Wollen wir nun, so wie wir es bei dem Potential zweier Mengen aufeinander gethan haben, auch beim Potential einer Menge auf sich selbst die Wechselbeziehung je zweier Elemente nur einmal in Rechnung bringen, so müssen wir die Hälfte der Summe der vorgenannten Partialproducte $dq\,V + dq'\,V' + dq''\,V'' + \cdots$ als Potential der Menge auf sich selbst in Rechnung bringen. Bezeichnen wir dasselbe mit W', so erhalten wir demnach:

$$W' = \tfrac{1}{2}(dq\,V + dq'\,V' + dq''\,V'' + \cdots) \quad . \quad . \quad 333)$$

eine Summe, welche, insofern die Elemente dq, dq', dq'' u. s. f. einen Raum stetig ausfüllen, ebenfalls durch ein Integral dargestellt wird. Um dem Ausdrucke dieses Integrals eine analoge Gestalt zu geben wie beim Potential zweier Mengen aufeinander, müssen wir uns die Bezeichnung etwas abgeändert denken, indem wir z. B. die einzelnen Elemente der gegebenen Menge der Reihe nach dq_1, dq_2, dq_3 u. s. f. nennen, dabei aber, indem wir eines, z. B. dq_1, herausgreifen und das darauf bezügliche Potential der übrigen in Betracht ziehen, für dieses Potential etwa den Ausdruck $\Sigma\frac{dq_1'}{r}$ einführen, welches bedeuten soll die Ausdehnung auf alle übrigen Elemente mit Ausschluss des ersten. Ebenso würde dann $\Sigma\frac{dq_n'}{r}$ den Potentialwerth aller Elemente mit Ausschluss des $n$ten, dq_n, auf die Quantitätseinheit eben dieses $n$ten Elementes bedeuten, und wir würden das Potential der Menge auf sich selbst durch die Formel $W' = \frac{1}{2}\,\Sigma\left(dq \cdot \Sigma\frac{dq'}{r}\right)$ oder, insofern die Elemente einen Raum stetig ausfüllen, durch die Formel

$$W' = \tfrac{1}{2}\int dq \int\frac{dq'}{r} = \tfrac{1}{2}\int\!\!\int\frac{dq\,dq'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 334)$$

darstellen können.

(Arbeit der Kräfte; potentielle elektrische Energie.) Die im vorhergehenden Paragraphen definirten Potentialwerthe W und W' haben eine wichtige mechanische Bedeutung, die man aus folgender Betrachtung erkennt. Denken wir uns wieder zwei Mengen eines Agens, ein System, dessen Elemente dq, und ein anderes System, dessen Elemente dq' heissen mögen, z. B. zwei Elektricitätsmengen, die aufeinander abstossend oder anziehend einwirken und in Folge dessen eine Bewegung hervorbringen, bei welcher sie sich entweder auf einem Leiter anders anordnen oder sammt den Leitern, auf welchen sie sich befinden, insofern diese beweglich sind (wie z. B. elektrische Pendel, Gewitterwolken u. s. w.), Ortsveränderungen erfahren. Jeder relativen Bewegung eines Elementes dq gegenüber einem Elemente dq' aus dem Abstande r in den Abstand $r + dr$ entspricht eine elementare Arbeit vom numerischen Betrage

$$\frac{dq\,dq'}{r^2} \cdot dr = -d\left(\frac{dq\,dq'}{r}\right),$$

und es ist einleuchtend, dass einer unendlich kleinen relativen Bewegung beider Systeme, d. i. aller Elemente dq gegenüber allen Elementen dq' eine Summe als Arbeitselement vom Betrage

$$dL = \Sigma \frac{dq\,dq'}{r^2} \cdot dr = -d\Sigma \frac{dq\,dq'}{r} = -dW^{*}) \; . \quad 335)$$

entsprechen wird, oder, insofern die beiden Mengen stetig ausgefüllte Räume einnehmen:

$$dL = \int\int \frac{dq\,dq'}{r^2}\, dr = -d \int\int \frac{dq\,dq'}{r} = -dW \; . \quad 336)$$

Das einer unendlich kleinen relativen Bewegung zweier Mengen eines Agens entsprechende Arbeitsdifferentiale wird also durch das negative Differentiale des Potentials der beiden Mengen aufeinander bestimmt; erfolgt also eine endliche, einem endlichen Arbeitswerthe L entsprechende Bewegung, bei welcher das Potential der beiden Mengen aufeinander aus dem Anfangswerthe W_1 in den Endwerth W_2 übergeht, so wird diese Arbeit ausgedrückt durch die Formel

$$L = W_1 - W_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 337)$$

nämlich durch die Differenz der Grenzwerthe des Potentials der beiden Mengen aufeinander.

---

*) Entsprechend dem Sinne der Formel 332 kann hier auch ein doppeltes Summenzeichen $\Sigma\Sigma$ eingesetzt werden.

Auch die Menge eines Agens für sich kann eine Zustandsänderung erfahren, die mit einer Arbeitsleistung verbunden ist, wenn z. B. eine Elektricitätsmenge auf einem Leiter anders sich anordnet. Jede Bewegung einer Elektricitätsmenge ist ja bekanntlich von calorischen, beziehungsweise auch mechanischen Effecten begleitet. Eine Wiederholung der vorhergehenden Schlussfolgerungen ergibt für diesen Fall das einer unendlich kleinen Bewegung der betrachteten Menge entsprechende Arbeitsdifferential

$$dL = -dW' \quad \ldots \ldots \quad 338)$$

wobei W' das Potential der bewegten Menge auf sich selbst bedeutet. Kommt eine endliche Bewegung dieser (z. B. Elektricitäts-) Menge zu Stande, so wird der entsprechende endliche Arbeitswerth durch

$$L = W_1' - W_2' \quad \ldots \ldots \quad 339)$$

bestimmt sein, wobei W_1' und W_2' die Grenzwerthe des Potentials der Menge auf sich selbst sind, W_1' für den Anfangszustand und W_2' für den Endzustand. Wird $W_2' = 0$, z. B. durch Ableitung der betrachteten Elektricitätsmenge in die Erde, so ist die diesem Vorgange entsprechende Arbeit

$$L = W_1' \quad \ldots \ldots \quad 340)$$

nämlich gleich dem Gesammtpotential der verschwundenen Elektricitätsmenge. Dieses Gesammtpotential drückt daher den gesammten Arbeitswerth aus, welchen die betrachtete Elektricitätsmenge überhaupt zu liefern vermag und wurde desshalb auch die potentielle Energie der gegebenen Elektricitätsmenge genannt (Briot).

Zur näheren Erläuterung des Sinnes der vorhergehenden Erörterungen dient beispielsweise die Betrachtung des Vorganges einer Elektricitätsentwickelung mit Hilfe einer Elektrisirmaschine. Durch die Thätigkeit derselben wird auf dem positiven Conductor eine gewisse Elektricitätsmenge von bestimmtem Potentialwerthe W_1' auf sich selbst angesammelt. Durch die Entladung der Maschine (indem z. B. der Conductor mit der Erde leitend in Verbindung gesetzt wird) verschwindet dieser Potentialwerth, das heisst, er wird $W_2' = 0$ und es tritt dabei eine dem $W_1' - W_2' = W_1' - 0 = W_1'$ äquivalente Ge-

sammtarbeit auf, welche aus Wärmewirkungen in den Leitern und bei der Funkenbildung an etwa vorhandenen Unterbrechungsstellen, und im letzteren Falle auch zum Theil aus mechanischen Wirkungen besteht.

Derselbe Gesammtarbeitswerth muss aber auch geliefert werden, um die vorher besagten Elektricitäten zu erregen, und es geschieht dies durch Hervorbringung mechanischer Arbeit bei der Bethätigung der Maschine, wobei freilich wohl zu beachten ist, dass nur ein verhältnissmässig kleiner Theil der zur Bewegung der Maschine aufgewendeten Arbeit zur Elektricitätsentwickelung verwendet, d. h. in potentielle Energie entwickelter Elektricitäten umgewandelt wird, indem ein grosser Theil dieser Arbeit durch Bewegungshindernisse verloren geht, deren Ueberwindung von keiner hier in Betracht kommenden Elektricitätsentwickelung begleitet ist.

In allen Fällen aber entspricht einer gewissen elektrischen Energie eine gewisse zu ihrer Erzeugung erforderliche Arbeitsmenge, und dieselbe Arbeitsmenge ist es, die beim Nullwerden jener elektrischen Energie wieder abgegeben wird.

Wir wollen die vorstehenden Betrachtungen nun auch auf ein System von mehreren Leitern L_1, L_2, L_3 u. s. w. ausdehnen, die wir uns alle einzeln genommen isolirt denken und auf welchen sich elektrische Ladungen Q_1, Q_2, Q_3 u. s. f. im Gleichgewichte befinden sollen. Das Gesammtpotential des ganzen Systems für einen Punkt sei auf dem ersten Leiter V_1, auf dem zweiten V_2, auf dem dritten V_3 u. s. w.*) Bezeichnen wir mit dq_1 ein Element der Ladung des ersten Leiters, also mit $V_1\, dq_1$ das Potential auf dieses Element, so wird

$$\tfrac{1}{2}\, V_1 \cdot \Sigma dq_1 = \tfrac{1}{2}\, V_1\, Q_1$$

den auf den ersten Leiter entfallenden Theil des Gesammtpotentials aller Ladungen auf sich selbst bedeuten, also mit anderen Worten, den auf den ersten Leiter entfallenden Theil der potentiellen Energie des ganzen Systems; dieselbe Bedeutung werden $\tfrac{1}{2}\, V_2\, Q_2$, $\tfrac{1}{2}\, V_3\, Q_3$ u. s. w. für die folgenden Leiter haben. Die potentielle Energie des gesammten Systems wird demnach sein:

$$W' = \tfrac{1}{2}\,(V_1\, Q_1 + V_2\, Q_2 + V_3\, Q_3 + \cdots) \quad . \quad . \quad 341)$$

*) Man beachte, dass innerhalb eines jeden Leiters und auf demselben die betreffenden Potentialwerthe V_1, V_2 u. s. w. constant sind.

In speciellen Fällen können einzelne Glieder der vorstehenden Summe Null werden, indem entweder V oder Q Null wird. Ersteres trifft zu, wenn der betreffende Leiter mit der Erde in Verbindung steht, in welchem Falle das Potential auf demselben, wie bereits gezeigt wurde, gleich Null sein muss; das Letztere tritt ein, wenn die auf dem Leiter befindliche Ladung nur aus Elektricitäten besteht, die durch Influenz von Seite der übrigen Leiter hervorgerufen worden sind; denn in diesem Falle ist die Summe der beiden Influenzelektricitäten gleich Null, folglich $Q = 0$.

(**Leydener Flasche.**) Die soeben entwickelten Principien gestatten mit Hilfe der oben gegebenen Theorie der Leydener Flasche, die Wirkungen des Entladungsschlages einer Leydener Flasche zu beurtheilen. Setzt man die innere Belegung einer solchen mit dem Conductor einer Elektrisirmaschine in leitende Verbindung, so wird dieselbe bis zu dem Potentialwerthe geladen, welcher der Ladung des Conductors entspricht, d. h. dieser bildet mit der inneren Belegung der Flasche zusammengenommen ein leitendes System, dessen Oberfläche für den Fall des Gleichgewichtes eine Niveaufläche ist. Es sei V_1 dieses Potential. Steht die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung, so ist, wie wir bereits nachgewiesen haben, auf derselben das Potential $V_2 = 0$. Stellt nun Q_1 die Ladung auf der inneren Belegung vor, so ist mit Beibehaltung der früher (Formel 330) gewählten Bezeichnungen $Q_1 = \frac{V_1 S_1}{4 \pi E}$. Es stellt nämlich S_1 den Flächenraum der inneren Belegung vor, während E die im vorliegenden Falle an allen Stellen gleich gross angenommene Entfernung der beiden Belegungen bedeutet. Andererseits ist nach den Bemerkungen des vorhergehenden Paragraphen die potentielle Energie der Ladung auf der inneren Belegung

$$W_1' = \tfrac{1}{2} V_1 Q_1 \quad \ldots \ldots \quad 342)$$

und auf der abgeleiteten äusseren, welche an ihrer inneren Grenzfläche die Ladung $- Q_1$ enthält, gleich Null. Es ist demnach der angegebene Werth W_1' die elektrische Energie der geladenen Flasche, somit auch der äquivalente Arbeitswerth ihrer Entladung. Wir können dafür vermöge

$$V_1 = \frac{4\pi E}{S_1} \cdot Q_1 = \frac{Q_1}{\sigma_1}$$

auch schreiben

$$W_1' = \frac{1}{2\sigma_1} \cdot Q_1^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 343)$$

indem wir nämlich die sogenannte Verstärkungszahl $\frac{S_1}{4\pi E}$ der Leydener Flasche gleich σ_1 setzen.

Hieraus wird ersichtlich, dass die Energie einer geladenen Leydener Flasche oder der Arbeitswerth ihrer Entladung dem Quadrate ihrer Ladung proportional ist.

Mit Rücksicht auf $\sigma_1 = \frac{S_1}{4\pi E}$ kann man auch schreiben:

$$W_1' = 2\pi E \cdot \frac{Q_1^2}{S_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 344)$$

eine Formel, welche, in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Riess, zu erkennen gibt, dass der Effect der Entladung dem Quadrate der Ladung direct und dem Flächenraume der Belegung verkehrt proportional ist.

Bei der Entladung wird die potentielle Energie, wie schon bei einer früheren Gelegenheit bemerkt worden ist, theils zur Ueberwindung des Luftwiderstandes bei der Bildung des elektrischen Funkens verwendet, theils in Wärme umgesetzt, sowohl bei der Funkenbildung selbst als bei der Erwärmung des Schliessungsbogens, nämlich bei der Erwärmung derjenigen Leiter, in welchen der Entladungsstrom vor sich geht. Wird der Arbeitsaufwand bei der Funkenbildung vermehrt, wie z. B. durch Einschaltung eines Kartenblattes, das vom Funken durchbohrt wird, so wird diese Vermehrung des mechanischen Effectes der Entladung auf Kosten des calorischen Effectes derselben bewerkstelligt, d. h. es findet in diesem Falle eine geringere Erwärmung in den metallischen Leitern statt, welche die Entladung vermitteln.

Es ist leicht, das Gesagte auf eine Batterie von Leydener Flaschen auszudehnen, wir wollen annehmen von n gleichen Flaschen, bei welchen die inneren Belegungen unter sich und mit der Elektricitätsquelle, und die äusseren Belegungen unter sich und mit der Erde in leitender Verbindung stehen, eine Anordnung welche man die Verbindung à la batterie zu nennen pflegt, im Gegensatze zur Verbindung à la cascade, welche darin besteht, dass die äussere Belegung der ersten Flasche mit der inneren der

zweiten, die äussere der zweiten mit der inneren der dritten u. s. f. und endlich die äussere Belegung der letzten Flasche mit der Erde leitend zusammenhängt.

Verbindet man die inneren Belegungen der zu einer Batterie vereinigten Flaschen mit der Elektricitätsquelle (Conductor der Maschine), so wird jede Flasche (da dieselben nach dem Vorhergehenden auf einander keine Wirkung ausüben) so geladen werden, als wenn sie allein und direct mit der Elektricitätsquelle in Verbindung wäre, in welchem Falle jede Flasche, wir wollen annehmen, eine Ladung vom Betrage Q_1 empfangen würde und zwar vom Potentialwerthe V_1 der Elektricitätsquelle selbst.

Demnach wird die Energie der Ladung der Batterie (vermöge Formel 343) sein:

$$W_n' = n \cdot \tfrac{1}{2} V_1 \, Q_1 = n \cdot \frac{1}{2\sigma_1} \cdot Q_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad 345)$$

oder

$$W_n' = n \, W_1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 346)$$

Es ist demnach die potentielle Energie der Batterie gleich der einer einzelnen Flasche, multiplicirt mit der Anzahl der Flaschen.

Hätte man eine einzige Flasche von derselben Glasdicke E und der $n$fachen Oberfläche, nämlich $n S_1$ hergestellt, so würde derselben bei gleichem Potentiale V_1 der Elektricitätsquelle (vermöge Formel 330) eine Ladung $Q_{(n)} = \frac{V_1 n S_1}{4\pi E} = n Q_1$ entsprechen, während andererseits für diese Flasche die Verstärkungszahl $= \frac{n S_1}{4\pi E} = n \sigma_1 = \sigma_{(n)}$ sein wird. Durch diese Substitution in Formel 343 erhält man, wenn die potentielle Energie dieser Flasche von $n$facher Belegung durch $W_{(n)}'$ bezeichnet wird:

$$W_{(n)}' = \frac{1}{2\sigma_{(n)}} Q_{(n)}^2 = \frac{1}{2 n \sigma_1} n^2 Q_1^2 = n \frac{1}{2\sigma_1} Q_1^2 \quad . \quad . \quad 347)$$

wie oben.

Hieraus folgt, dass die potentielle Energie einer Batterie von n gleichen Flaschen gleich ist derjenigen einer einzigen Flasche von $n$facher Oberfläche bei gleicher Glasdicke E.

Führt man endlich in die Formel 345 für die Ladung Q_1 einer einzelnen Flasche die Gesammtladung für alle n Flaschen

ein, die dann natürlich $= n Q_1 = Q_{(n)} =$ der Ladung einer einzelnen Flasche von $n$facher Belegung bei gleicher Glasdicke ist, so nimmt diese Formel die Gestalt an:

$$W_n' = n \frac{1}{2\sigma_1} \frac{Q_{(n)}^2}{n^2} = \frac{1}{2\sigma_1} \cdot \frac{Q_{(n)}^2}{n} \quad \ldots \quad 348)$$

Diese Formel spricht den auch experimentell bestätigten Satz aus, dass die (mit dem Riess'schen Luftthermometer ermittelte) potentielle Energie einer Batterie dem Quadrate der (mittelst der Lane'schen Massflasche gemessenen) Gesammtladung direct und der Flaschenzahl verkehrt proportional ist. Dabei ist zu beachten, dass die Ladung der Batterie vermöge Formel 330 mit dem Potentialwerthe wächst, welcher letztere bekanntlich den Potentialwerth der Elektricitätsquelle zur Grenze hat.

Denkt man sich eine Reihe von Leydener Flaschen à la cascade verbunden, so wird die innere Belegung der ersten Flasche das Potential V_1 der Elektricitätsquelle annehmen, die Ladung sei Q_1; die äussere Belegung der ersten und die innere der zweiten bilden ein System von einem gemeinschaftlichen Potential V_2 mit Ladungen $- Q_2$ auf ersterer und $+ Q_2$ auf letzterer Belegung; man erhält also der Reihe nach die potentiellen Energien $\frac{1}{2} V_1 Q_1$; $- \frac{1}{2} V_2 Q_2$; $+ \frac{1}{2} V_2 Q_2$ u. s. w., wobei man für die mit der Erde verbundene äussere Belegung der letzten Flasche ein Glied $= 0$ bekommt. Es ergibt sich demnach für die potentielle Energie der Cascadenbatterie

$$W' = \frac{1}{2} (V_1 Q_1 - V_2 Q_2 + V_2 Q_2 - \cdots) = \frac{1}{2} V_1 Q_1 \quad . \quad 349)$$

Dabei ist zu beachten, dass Q_1 einen von der Flaschenzahl abhängigen*) Werth hat, der nach Massgabe der Formel 329 kleiner als derjenige ist, der bei abgeleiteter äusserer Belegung ($V_2 = 0$) stattfinden würde. Es ist ferner leicht nachzuweisen, dass die Summe der Ladungen aller Flaschen

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots),$$

wie schon Green gezeigt hat,**) gleich der Ladung einer einzigen Flasche ist, wenn deren innere Belegung mit derselben Elektricitätsquelle, die äussere jedoch mit der Erde

---

*) Vergl. Riess in Pogg. Ann. Bd. 80, S. 358.

**) Crelle's Journal, Bd. 47, S. 166.

leitend verbunden wird. Hieraus erklärt sich die Beobachtung, welche schon Franklin selbst an dieser von ihm erfundenen Batterie machte, dass die Flaschen in dieser Anordnung ein gewisses Widerstreben („some reluctance“) zeigen, sich laden zu lassen.

(**Stationäre Ströme.**) Wenn das Potential in einem Leiter nicht constant ist, tritt Bewegung der Elektricität ein, es entsteht ein elektrischer Strom. Wir wollen im Folgenden die Gesetze des elektrischen Stromes unter der Voraussetzung besprechen, dass die Elektricitätsbewegung jenen Beharrungszustand angenommen habe, welchen man mit dem Ausdrucke eines stationären oder constanten Stromes kennzeichnet.

Die strömende Elektricität ertheilt den Molecülen des Leiters Bewegungen, d. h. der Vorgang, welchen wir einen elektrischen Strom nennen, bringt stets Molecularbewegungen mit sich, die sich durch Erwärmung des Leiters zu erkennen geben. Insofern im Leiter schon von vornherein eine seiner Temperatur entsprechende Molecularbewegung vorhanden ist, kann man auch sagen, dass diese durch den elektrischen Strom verstärkt wird. Die Erwärmung des Leiters durch den Strom beruht also auf einer Vermehrung der lebendigen Kräfte der Molecüle, die von der Elektricitätsquelle, welche den Strom liefert, durch einen äquivalenten Aufwand von Wärme oder Werk*) bestritten werden muss. Man wird auf diese Art zur Vorstellung eines Widerstandes geführt, der bei der Erzeugung und Unterhaltung eines elektrischen Stromes stets zu überwinden ist. Die dabei in einem Leiter stattfindende Wärmeentwickelung ist erfahrungsgemäss dem Quadrate der Stromstärke und andererseits einer von der Beschaffenheit des Leiters abhängigen Grösse, die man eben den Widerstand des Leiters zu nennen pflegt, proportional.

Wir wollen bis auf Weiteres voraussetzen, dass weder Elektrolyse, noch äussere Arbeit durch Bewegung von Leitern oder Magneten, noch eine Induction mittelst benachbarter Stromleiter oder Magnete stattfinde. Es ist dann die Erwärmung des Leiters die einzige in Betracht kommende Wirkung des Stromes.

---

*) Je nachdem der Strom durch calorische (beziehungsweise chemische) oder mechanische Mittel erzeugt wird.

Um die Anwendung der Potentialtheorie auf elektrische Ströme durch geläufige Vorstellungen und Ausdrücke zu vermitteln, wollen wir auch hier die Hypothese elektrischer Fluida beibehalten; dabei ist es übrigens gleichgiltig, ob wir in der That zwei Fluida annehmen, in dem Sinne, dass wir uns einen Strom von der Intensität i durch eine Quantität $\frac{i}{2}$ des positiven Fluidums in der einen und eine ebenso grosse Quantität negativen Fluidums in der entgegengesetzten Richtung, in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehend, gebildet denken, oder ob wir nur ein einziges Fluidum annehmen, von welchem in der Zeiteinheit die Menge i durch die Flächeneinheit geht.

Wenn dabei von der Bewegung einer Elektricitätsmenge dq durch eine gewisse Strecke einer Strombahn die Rede ist, so ist dies nicht wörtlich so zu verstehen, dass in der That die besagte Strecke von einem und demselben elektrischen Theilchen dq durchlaufen werde, sondern man kann sich den Vorgang auch so denken, dass dq nach Zurücklegung eines unendlich kleinen Weges an die Stelle eines anderen aber gleichen Elementes dq trete, welches dann nach Zurücklegung eines ebensolchen unendlich kleinen Weges an die Stelle eines dritten gleichen Elementes dq tritt u. s. w., so dass nicht die ganze Strecke der Strombahn von dem nämlichen Theilchen dq, sondern vielmehr nur alle Theile dieser Strecke der Reihe nach von verschiedenen aber gleichen Theilchen dq zurückgelegt werden.*)

(**Anordnung der Elektricität auf dem Stromleiter.**) Es

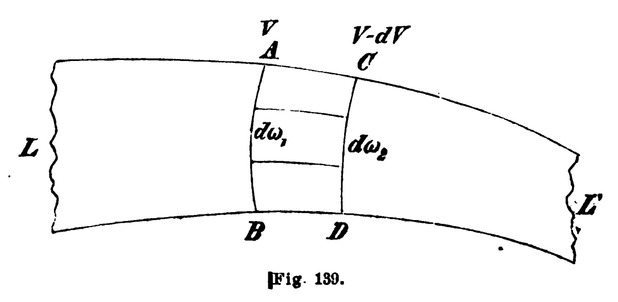


Fig. 139.

sei LL' (Fig. 139) ein Stück eines Stromleiters und AB und

*) Man vergleiche das bei der Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit in der Mechanik über einen ähnlichen Vorgang Gesagte; Seite 155—156.

CD zwei im Abstande dn von einander befindliche, den Potentialwerthen V und $V - dV$ entsprechende Niveauflächen, die sämmtliche Stromfäden $d\omega_1\, d\omega_2$, somit auch die Oberfläche des Leiters, senkrecht durchschneiden. Das in der Figur angedeutete Stück eines Stromfadens ist ein von den Elementen $d\omega_1$ und $d\omega_2$ der vorbesagten Niveauflächen begrenzter orthogonaler Canal.

Betrachten wir ein an der Eintrittsfläche $d\omega_1$ dieses Canals befindliches Theilchen dq, so erfährt dasselbe nach bereits vorgetragenen Principien einen gegen die Austrittsfläche $d\omega_2$ hin gerichteten Druck p vom Betrage

$$p = - dq \cdot \frac{dV}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 350)$$

Es wird demnach, unter Voraussetzung eines stationären Stromes, wohl auch die in der Zeiteinheit durch die Eintrittsfläche $d\omega_1$ gehende Elektricitätsmenge dJ dem Verhältnisse $\frac{dV}{dn}$, welches man auch das Gefälle der Potentials nennt, proportional sein, so wie andererseits selbstverständlich der Grösse $d\omega_1$ der Eintrittsfläche selber. Man kommt auf diese Art zu dem Ausdrucke

$$dJ = - a\frac{dV}{dn}\, d\omega_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 351)$$

wobei a die Elektricitätsmenge bedeutet, die bei einem Gefälle $= 1$ durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit gehen würde; eine Grösse, die von der materiellen Beschaffenheit des Leiters abhängt und specifische Leitungsfähigkeit genannt wird, während ihr reciproker Werth $\frac{1}{a}$ specifischer Leitungswiderstand heisst.

Im Sinne dieser Bezeichnung wird, wenn wir der Einfachheit wegen ein einziges Fluidum in's Auge fassen, in einem Zeitelemente dt die Elektricitätsmenge $- a\, dt \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$, an der Eintrittsfläche eintreten, und gleichzeitig die Menge

$$- a\, dt \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$$

an der Austrittsfläche austreten, wobei die den Differentialquotienten beigefügten Stellenzeiger andeuten, dass die Werthe

beziehungsweise für die Ein- und Austrittsstelle gelten. Demnach ergibt sich als Zuwachs der Elektricitätsmenge im orthogonalen Canale der Betrag $-a\,dt\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right]$ für jedes Zeitelement. Dieser Zuwachs muss aber, falls ein stationärer Strom bestehen soll, $= 0$ sein. Es muss also der eingeklammerte Ausdruck, folglich auch

$$-\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2 - \left[-\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1\right] = 0 \quad . \; . \quad 352)$$

sein. Dieser letztere Ausdruck bedeutet aber im Sinne der Formel 331 die Differenz der Kräfte, welche nach dem Verlaufe des orthogonalen Canals auf seine Endflächen wirken, und diese Differenz ist nach jener Formel der 4πfachen im Canale enthaltenen Elektricitätsmenge gleich. Es befindet sich sonach in diesem Canale überhaupt keine freie Elektricität und dasselbe gilt vom ganzen Innern des Leiters, welches ja aus lauter solchen orthogonalen Canälen gebildet angesehen werden kann.

Die freie Elektricität, von welcher das Potential herrührt, kann sich daher nur auf der Oberfläche des Stromleiters befinden. Im Innern des Leiters hat man sich vorzustellen, dass im Sinne der Hypothese eines einzigen Fluidums überall die normale Menge, in fortschreitender Bewegung begriffen, vorhanden sei; im Sinne der dualistischen Hypothese aber, dass überall gleiche Mengen positiven und negativen Fluidums, deren Bewegungen im entgegengesetzten Sinne den Strom bilden, und deren Summe in jedem Volumelemente des Leiters Null ist, gleichzeitig ein- und austreten.

(**Ohm'sches Gesetz.**) Durch Anwendung der Formel 351 auf Leiter von solcher Form, d. i. von so geringer Dicke (wie z. B. Drähte), dass der ganze innerhalb des Leiters liegende Theil der betrachteten Niveaufläche, dessen Flächengrösse mit ω bezeichnet werden mag, als ein ebenes dem Querschnitte des Leiters entsprechendes Flächenelement angesehen werden kann, erhält man die in der Zeiteinheit durch die Niveaufläche gehende Elektricitätsmenge, d. i. die totale Stromintensität J durch die Formel

$$J = -a\frac{dV}{dn}\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 353)$$

welche das bekannte Ohm'sche Gesetz in der Form darlegt, die ihm Kirchhoff durch Einführung der Potentialfunction gegeben hat und die in anderer Gestalt auch durch den nachstehend entwickelten Ausdruck wiedergegeben wird.

Durch Integration der aus obiger Formel folgenden Gleichung

$$-\,dV = J\frac{dn}{a\omega}$$

erhält man $-(V_2 - V_1) = V_1 - V_2 = J\int_1^2 \frac{dn}{a\omega}$ oder $=$

$$J\int_1^2 d\lambda = J(\lambda_2 - \lambda_1),$$

wenn man die Grösse $\frac{dn}{a\omega}$ einstweilen mit $d\lambda$ bezeichnet. Man nennt diese Grösse, welche der Länge dn des betreffenden Leiterelementes und dem specifischen Leitungswiderstande $\frac{1}{a}$ direct, aber dem Querschnitte ω des Leiters verkehrt proportional ist, ein Widerstandsdifferential. $\lambda_2 - \lambda_1$, wofür wir kurzweg λ setzen wollen, stellt also den sogenannten Widerstand des Leiterstückes vor, welches von den den Potentialwerthen V_1 und V_2 entsprechenden Niveauflächen begrenzt wird. Man erhält auf diese Art

$$J = \frac{V_1 - V_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{V_1 - V_2}{\lambda} \quad \ldots\ldots \quad 354)$$

als Ausdrücke des Ohm'schen Gesetzes, wobei man die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ auch elektromotorische Kraft zu nennen pflegt.

Für den Fall homogener, prismatischer oder cylindrischer Leiter bedeutet ω einen constanten ebenen Querschnitt und $\int\frac{dn}{a\omega}$ erhält die Form $\frac{1}{a\omega}\int dn = \frac{n_2 - n_1}{a\omega}$, wofür wir $\frac{l}{a\omega}$ schreiben wollen, indem wir unter l einfach die Länge des zwischen den vorgenannten Niveauflächen liegenden Leiterstückes zu verstehen haben. Nennt man den constanten Querschnitt q, so geht die allgemeine Formel

$$\lambda = \int\frac{dn}{a\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 355)$$

für den speciellen Fall über in

$$\lambda = \frac{l}{aq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 356)$$

welche letztere schon in den Anfangsgründen der Physik gelehrt wird. Man nennt solche Leiter von constantem, verhältnissmässig kleinem Querschnitte lineare Leiter.

(**Arbeit des Stromes.**) Indem das Element dq aus der Niveaufläche V in die Niveaufläche $V - dV$ (Fig. 139) übergeht, verrichtet die bewegende Kraft $p = -dq\frac{dV}{dn}$ (siehe Formel 350) längs der Strecke dn des orthogonalen Canales die Arbeit

$$p \cdot dn = -dq\frac{dV}{dn}dn = -dq\,dV \quad . \quad . \quad . \quad 357)$$

Demnach wird auf einem endlichen Wege aus einer Niveaufläche V_1 in eine andere Niveaufläche V_2 im Leiter die Arbeit

$$\int p\,dn = -dq(V_2 - V_1) = dq(V_1 - V_2) \quad . \quad . \quad 358)$$

verrichtet.

Bei einem Strome von der Intensität J ist es eine Summe elektrischer Massenelemente vom Betrage $\Sigma dq = J$, welche in der Zeiteinheit durch die Niveaufläche V_1 eintreten, während gleichzeitig eine eben solche Menge bei der Niveaufläche V_2 austritt. Dieser Vorgang entspricht also einer Ueberführung der Quantität $\Sigma dq = J$ aus dem Potentialniveau V_1 in jenes V_2, also nach der vorhergehenden Formel einer Arbeit elektrischer Kräfte vom Betrage

$$L = J(V_1 - V_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 359)$$

Man kann den Vorgang auch in der Art betrachten, dass man zunächst die in einem Zeitelemente dt durch einen Querschnitt gehende Elektricitätsmenge Jdt ins Auge fasst, die nunmehr die Stelle von dq in Formel 358 vertritt. Innerhalb des Zeitelementes dt erfolgt ebensowohl der Eintritt der Menge Jdt durch den Querschnitt vom Potentialniveau V_1 als auch der gleichzeitige Austritt einer ebensolchen Menge Jdt durch den Querschnitt vom Potentialniveau V_2, welcher Vorgang einer Ueberführung der Menge Jdt aus dem Niveau V_1 in jenes V_2 binnen der Zeit dt, also einer binnen derselben Zeit

dt verrichteten Arbeit

$$dL = J\,dt(V_1 - V_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 360)$$

entspricht. Durch Integration für das Zeitintervall von 0 bis 1 erhält man die bereits durch Formel 359 ausgedrückte Arbeit des Stromes J während einer Zeiteinheit. Bei den vorstehenden Betrachtungen über die Stromarbeit und insbesondere über die in Formel 358 ausgedrückte elementare Arbeit, hat man sich die am Schlusse des Paragraphen über stationäre Ströme (S. 330) gemachten Bemerkungen über die Elektricitätsbewegung wohl gegenwärtig zu halten.

Abgesehen von einer Aenderung der lebendigen Kraft der beziehungsweise bei V_1 eintretenden und bei V_2 austretenden elektrischen Theilchen, welche, wenn eine solche Anschauung vom Wesen der Elektricität überhaupt statthaft sein sollte, jedenfalls zu vernachlässigen sein wird, kann die Stromarbeit theils als Elektrolyse, theils als Arbeit durch Bewegung von Stromleitern oder Magneten und ganz vornehmlich als calorische Wirkung vermöge Erwärmung des Stromleiters in Betracht kommen.

Sie ist vergleichbar der Bewegung eines Gewichtes J, welches Arbeit verrichtend ohne Beschleunigung aus einem Niveau V_1 in ein tieferes V_2 niedersinkt. Sie wird bestritten durch einen äquivalenten Arbeitsaufwand in der Stromquelle z. B. Wärmeentwickelung durch Verbrennung oder Strahlung (Thermosäulen) oder durch chemische Processe zwischen Metallen und Flüssigkeiten (hydroelektrische Ketten) oder mechanischen Arbeitsaufwand (magneto-elektrische Inductionsapparate). Den solchergestalt für jede Stromeinheit in der Zeiteinheit entwickelten Arbeitsaufwand nennt man auch die elektromotorische Kraft der Stromquelle, worauf wir später noch zurückkommen werden.

Durch Verbindung der Gleichung 359, nämlich $L = J(V_1 - V_2)$ mit der Ohm'schen (354) d. i. $J = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}$, erhält man

$$L = J^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 361)$$

als Ausdruck für die Stromarbeit in der Zeiteinheit innerhalb des betrachteten Leiterstückes vom Widerstande λ. Die äquivalente Wärmeentwickelung (welche bei Ausschluss aller an-

deren vorhin aufgezählten Erscheinungsformen der Stromarbeit in Betracht kommt) ist

$$Q = AL = AJ^2\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad 363)$$

wobei A, wie üblich, das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bedeutet; ein von Joule experimentell gefundenes, von Lenz und Becquerel bestätigtes, später von W. Thomson und von Clausius theoretisch begründetes Gesetz, welches aussagt, dass die Arbeitsleistung (beziehungsweise Wärmeentwickelung) eines elektrischen Stromes innerhalb eines begrenzten Stromleiters dem Widerstande desselben und dem Quadrate der Stromstärke proportional ist.

Die vorstehenden Formeln für die Arbeit setzen eine Stromeinheit voraus, welche durch die Potentialwerthe V bereits bestimmt ist. Bei der Definition des Potentials sind wir nämlich von der Annahme ausgegangen, dass wir jene Menge eines Agens als Quantitätseinheit betrachten, die auf eine gleich grosse in der Entfernung 1 befindliche eine Kraft von der Intensität 1 (anziehend oder abstossend) ausübt. Auf diese Einheit der Quantitäten beziehen sich also die Grössen m und m' in dem Ausdrucke für eine anziehende oder abstossende Kraft $p = \pm \frac{m m'}{r^2}$, wobei r die Distanz der Punkte vorstellt, in welchen man sich die Quantitäten m und m' concentrirt denkt. Die Einheit der Quantitäten m wird offenbar bestimmt sein, sobald die Einheiten für r und p festgestellt sind, nämlich die Längeneinheit und die Krafteinheit. Nimmt man also z. B. als Längeneinheit ein Millimeter an und als Krafteinheit die von Gauss aufgestellte, welche die Masse eines Kubikmillimeters Wasser in der Sekunde mit der Acceleration eines Millimeters beschleunigt, so ist die Elektricitätsmenge = 1 genau definirt. Sie ist jene Menge, welche auf eine gleich grosse in der Entfernung eines Millimeters befindliche eine Wirkung im Betrage der Gauss'schen Krafteinheit ausübt. Da nun die Stromintensität J auch nichts anderes ist als eine Elektricitätsmenge, diejenige nämlich, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Stromleiters geht, so ist mit den Einheiten für r und p auch die Stromeinheit festgestellt, und da andererseits die Potentialwerthe V schon von vornherein auf denselben Einheiten beruhen, so ist vermöge des Ohm'schen

Gesetzes auch die Einheit der Widerstände $\lambda = \frac{V_1 - V_2}{J}$ bereits mitbestimmt. Dasselbe gilt selbstverständlich auch von der Arbeitseinheit, die sich ja aus den Einheiten von p und r unmittelbar zusammensetzt. Die Arbeitseinheit wird nämlich unter den vorausgeschickten Annahmen eine Arbeit sein, die einen Widerstand vom Betrage der Gauss'schen Krafteinheit durch die Wegesstrecke eines Millimeters überwindet. Das Gesagte gilt endlich auch für die sogenannte elektromotorische Kraft, mit welchem Ausdrucke wir eben nichts anderes als eine gegebene Potentialdifferenz bezeichnet haben.

Geht man von diesen Einheiten auf andere über, so wird im Allgemeinen in die Formel für die Stromeinheit noch ein bestimmter, von der Wahl der Einheiten abhängiger, constanter Factor eingehen. Nehmen wir z. B. die chemische (Jacobi'sche) Stromeinheit an und die Siemens'sche Widerstandseinheit, während wir als Arbeitseinheit ein Kilogrammmeter wählen, und bezeichnen wir die auf diese Einheiten bezogenen Werthe für die Stromstärke, den Widerstand und die Stromarbeit beziehungsweise mit s, w und a, so wird der Zusammenhang dieser Grössen durch die Formel

$$a = ks^2w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 363)$$

dargestellt, wobei $k = 0{,}000878$ ist, oder bei Einführung der elektromotorischen Kraft e (auf Jacobi-Siemens'sche Einheiten bezogen)

$$a = kse \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 364)$$

(**Verallgemeinerung des Begriffes der potentiellen Energie und Anwendung auf verschiedene Agentien.**) Der Begriff des Potentials einer Menge auf eine andere, lässt sich dem Begriffe des Potentials auf sich selbst unterordnen, wie folgende Betrachtung lehrt. Man denke sich zwei Mengen A und B eines Agens, die auf einander anziehend oder abstossend einwirken (wie es z. B. bei der Wechselwirkung von zwei benachbarten Gewitterwolken oder von zwei Magneten der Fall ist). Das Potential der beiden Mengen aufeinander, d. h. der einen auf die andere sei W_{ab} das Potential von A auf sich selbst sei W_a' und von B auf sich selbst W_b'. In Folge der Wechselwirkung beider Mengen, welche allenfalls eine relative Bewegung derselben hervorbringen mag, oder in Folge irgend einer

anderen Veranlassung (z. B. einer theilweisen Entladung der Gewitterwolken unter sich oder in die Erde) finden Aenderungen der vorgenannten Potentialwerthe statt, indem eine andere Anordnung der Mengen A und B Platz greift. Bei diesem Vorgange wird W_{ab} nach Ablauf einer gewissen Zeit in $W_{\alpha\beta}$, ferner W_a' in W_α' und endlich W_b' in W_β' übergegangen sein. Die negative Summe dieser Aenderungen nämlich

$$-[(W_{\alpha\beta} - W_{ab}) + (W_\alpha' - W_a') + (W_\beta' - W_b')]$$
$$= (W_{ab} - W_{\alpha\beta}) + (W_a' - W_\alpha') + (W'_b - W'_\beta),$$

muss nach dem Vorhergehenden (Formel 337 und 339) die bei dem betrachteten Vorgange von den Kräften des wirksamen Agens verrichtete Gesammtarbeit L darstellen. Schreibt man nun die auf solche Art sich ergebende Gleichung in der Form

$$L = (W_{ab} + W_a' + W_b') - (W_{\alpha\beta} + W_\alpha' + W_\beta') \quad . \quad 365)$$

so kann jede der beiden Summen als ein Potential auf sich selbst angesehen werden, wenn man nämlich die beiden Mengen A und B zusammengenommen als ein einziges System betrachtet. L ist dann die Differenz der Potentialwerthe dieses vereinigten Systems auf sich selbst, vor und nach dem oben betrachteten Vorgange.

Die beiden Fälle einer positiven oder negativen Arbeit des Agens sind leicht zu unterscheiden, je nachdem entweder Bewegungen im Sinne der wirksamen Kräfte des Agens stattgefunden haben, oder aber Bewegungen im entgegengesetzten Sinne, unter Ueberwindung der Kräfte des Agens, durch äusseren Kraftaufwand bewerkstelligt worden sind. (Ersteres findet statt, wenn man zwei einander anziehende Magnete sich nähern lässt, — Letzteres, wenn man dieselben von einander entfernt.) In dem einen Falle sagen wir mit Clausius, dass die Kräfte des Agens eine Arbeit thun, in dem anderen, dass sie eine Arbeit erleiden.

Zur Erläuterung des Begriffes des Potentials auf sich selbst stellen wir uns die Aufgabe, beispielsweise die bei der Bildung des Erdkörpers durch Massenverdichtung freigewordene Wärmemenge, wir wollen sie Verdichtungswärme nennen, zu berechnen. Dabei nehmen wir zur Vereinfachung der Rechnung eine gleichförmige Dichte im Betrage der mittleren Dichte der Erde an.

Wir denken uns die den Erdkörper constituirenden Massentheilchen im Urzustande in solchen gegenseitigen Entfernungen im Weltraume zerstreut, dass sie nur mit verschwindend kleinen Kräften aufeinander einwirkten. Der Grenzwerth W_o' des Potentials auf sich selbst für den Urzustand ist also Null. ($W_o' = 0$.)

Vergleichen wir damit das Potential der Erde auf sich selbst in ihrem gegenwärtigen Zustande. Wir betrachten sie als kugelförmig und denken uns dieselbe in lauter concentrische Schichten vom Masseninhalte $k \cdot 4\pi x^2 dx$ zerlegt, wobei x den Radius der betreffenden Schichte, dx ihre Dicke und k die vorhin erwähnte mittlere Dichte (Masse der Volumseinheit) der Erde vorstellt. Das Potential der Erde, deren Radius R sein soll, auf ein im Abstande x vom Centrum befindliches Massentheilchen dq ist mit Rücksicht auf Formel 194

$$V dq = 2\pi k\left(R^2 - \frac{x^2}{3}\right) dq,$$

folglich auf die ganze Schichte

$$2\pi k\left(R^2 - \frac{x^2}{3}\right) \times k \cdot 4\pi x^2 dx = 8\pi^2 k^2 \left(R^2 x^2 - \frac{x^4}{3}\right) dx$$

Das Potential der Erde auf sich selbst $W_1' = \frac{1}{2}\int V dq$ wird demnach dem halben Integralwerthe des vorstehenden Ausdruckes entsprechen, nämlich

$$W_1' = \frac{1}{2}\int V dq = 4\pi^2 k^2\left[R^2 \int_o^R x^2 dx - \frac{1}{3}\int_o^R x^4 dx\right]$$

$$= 4\pi^2 k^2 \left[\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{15}\right] = \frac{48}{45}\pi^2 k^2 R^5,$$

indem die Integration natürlich auf alle Kugelschalen von der Dicke dx zwischen $x = 0$ und $x = R$ auszudehnen ist. Man kann diesen Ausdruck auch in der Gestalt schreiben

$$W_1' = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi k R^3\right)^2 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{R} \quad . \quad . \quad . \quad 366)$$

wenn man mit M die Erdmasse bezeichnet. Der Ausdruck $W_1' - W_o' = W_1' = \frac{3}{5}\frac{M^2}{R}$ stellt die Verdichtungsarbeit bei der Bildung des Erdkörpers vor, bezogen auf eine Kraftein-

heit, welche der Anziehung zweier Masseneinheiten (Liter Wasser) in der Distanzeinheit (Meter) gleichkommt, wenn man sich M und R nach diesen Einheiten gemessen denkt. Will man die Arbeit in Kilogrammmetern, also auf Kilo als Krafteinheit bezogen, in Rechnung bringen, so erwäge man, dass die Kraft, die wir ein Kilogramm nennen, auf die vorhin erwähnte Krafteinheit des Ausdruckes 366 bezogen, durch $\frac{M \times 1}{R^2} = \frac{M}{R^2}$ vorgestellt wird, denn dies ist, nach der soeben erwähnten Krafteinheit, der Betrag der Anziehung (des Gewichtes) eines Liters Wasser auf der Erdoberfläche. Man erhält demnach

$$\text{Meterkilo } W_1' = \frac{3}{5}\frac{M^2}{R} : \frac{M}{R^2} = \frac{3}{5} MR \quad . \quad . \quad 367)$$

Die äquivalente Wärmemenge in Calorien beträgt

$$Q_1 = AW_1' = \tfrac{3}{5} AMR.$$

Denkt man sich n Kugeln aus Steinkohle von gleicher Masse wie die Erde und rechnet man C Calorien als Verbrennungswärme für ein Kilo, so entspricht denselben eine Verbrennungswärme nMC. Sollen beide Wärmemengen einander gleich sein, nämlich

$$\tfrac{3}{5} AMR = nMC$$

so muss $n = \frac{3}{5}\frac{AR}{C}$ sein.

Dies ist die Anzahl der Kugeln Steinkohle (von gleicher Masse wie die Erde), deren Verbrennungswärme der Verdichtungswärme des Erdkörpers gleichkäme. Durch Substitution bekannter Zahlenwerthe erhält man

$$n = \frac{3 \times 6370000}{5 \times 424 \times 6000} = 1{,}5$$

annähernd.

(**Princip der Erhaltung der Arbeit mit Einführung des Potentialbegriffes.**) Bewegt sich ein Massentheilchen m unter Einwirkung einer Kraft R, deren Richtung zur Zeit t den Winkel φ mit dem im nächstfolgenden Zeitelemente dt beschriebenen Bahnelemente ds einschliesst, so entspricht die innerhalb jenes Zeitdifferentiales dt eintretende Aenderung der lebendigen Kraft, nämlich $d\frac{mv^2}{2}$, der Gleichung

$$d\frac{mv^2}{2} = R\cos\varphi\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 368)$$

wie aus den Erläuterungen der Formel 49 der Mechanik

$$\left(R\cos\varphi\, ds = S\, ds = mv\, dv = d\,\frac{mv^2}{2}\right)$$

leicht hervorgeht. Bezeichnet man mit X, Y und Z die den Coordinatenaxen parallelen Componenten von R und mit dx, dy und dz die Projectionen von ds auf dieselben Axen, so gelangt man durch Anwendung der bei Ableitung der Formel 54 durchgeführten Schlussfolgerungen zu dem Ausdrucke

$$d\frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 369)$$

Durch Ausdehnung auf ein System von beliebig vielen Massentheilchen ergibt sich

$$d\Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz)$$

und endlich durch Integration für einen endlichen Zeitraum von t_0 bis t, innerhalb dessen die Anfangsgeschwindigkeiten v_0 der Theilchen in die Endgeschwindigkeiten v übergehen,

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t}\Sigma(X dx + Y dy + Z dz) \quad . \quad 370)$$

wobei der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen die Gesammtarbeit aller auf die Massentheilchen wirkenden Kräfte innerhalb des betrachteten Zeitraumes vorstellt und x, y und z als Functionen der Zeit angesehen werden.

Diese Gleichung, welche die Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit ausdrückt, und insofern auch als Ausdruck des Princips der Erhaltung der Arbeit betrachtet werden kann, gestattet eine elegantere Formulirung mit Hilfe des Potentialbegriffes.

Zu dem Ende kehren wir auf die im vorhergehenden Paragraphen durchgeführten Betrachtungen zurück und denken uns eine allmälig fortschreitende Massenverdichtung (z. B. wieder des Erdkörpers) etwa in drei Stadien 0, 1 und 2, welchen die zunehmenden Potentialwerthe $W_0' = 0$, W_1' und W_2' entsprechen. Wir können uns diesen Process fortgesetzt denken bis zu einem Endzustande, über welchen hinaus eine

weitere Verdichtung nicht mehr möglich ist. Diesem endlichen stabilen Gleichgewichtszustande wird ein Maximalwerth W_n' des Potentials entsprechen. Um in denselben zu gelangen, muss vom Verdichtungsstadium 1 aus die Arbeit $P_1 = W_n' - W_1'$ und vom Stadium 2 aus die Arbeit $P_2 = W_n' - W_2'$ von den inneren Kräften des Systems der Massentheilchen verrichtet werden. Man kann daher die Arbeit, die beim Uebergange aus dem Stadium 1 in das Stadium 2 verrichtet wird, auch darstellen durch die Differenz

$$(W_n' - W_1') - (W_n' - W_2') = P_1 - P_2$$

Bei diesem Uebergange findet aber eine Aenderung der lebendigen Kräfte $\Sigma \frac{m v_2^2}{2} - \Sigma \frac{m v_1^2}{2}$ statt, welche vermöge Gleichung 370 der Arbeit $P_1 - P_2$ bei diesem Uebergange gleich sein muss. Es besteht also die Relation

$$\Sigma \frac{m v_2^2}{2} - \Sigma \frac{m v_1^2}{2} = P_1 - P_2$$

oder, wie wir lieber schreiben wollen,

$$\Sigma \frac{m v_1^2}{2} + P_1 = \Sigma \frac{m v_2^2}{2} + P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 371)$$

Die Grösse P, welche die Arbeit vorstellt, welche die Kräfte des Systems bis zum Eintritte jenes stabilen Endzustandes, dem der Maximalwerth des Potentials entspricht, noch zu verrichten haben, nennen wir potentielle Energie oder Spannkraft, im Gegensatze zur Grösse $\Sigma \frac{m v^2}{2}$, welche die actuelle Energie oder die lebendige Kraft bedeutet. Schreibt man nun die Gleichung 371 in der Form

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} + P = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 372)$$

so haben wir in einfachster Gestalt den Ausdruck des Principes der Erhaltung der Arbeit in grösster Allgemeinheit. Es lautet: Die Summe der actuellen Energie und potentiellen Energie bleibt constant; oder: Die Gesammtsumme der lebendigen Kräfte und der Spannkräfte bleibt constant. Das Gesetz gilt auch für die Gesammtheit aller Massen des Weltalles.

Für den Endzustand eines Systems (welchem das grösste

Potential auf sich selbst entspricht, wenn wir den Fall der Gravitation im Auge behalten) ist die potentielle Energie gleich 0.

Die Massentheilchen eines Systems, z. B. ein Complex von Atomen, können in verschiedenen Gleichgewichtszuständen angeordnet gedacht werden, die Atome zu verschiedenen chemischen Verbindungen gruppirt. Diesen Gleichgewichtszuständen entsprechen gewisse Werthe des Potentials auf sich selbst. Durch eine äussere Veranlassung kann ein solcher Gleichgewichtszustand aufgehoben und in einen anderen übergeführt werden. Dabei thun oder erleiden die Affinitätskräfte gewisse Arbeiten. Ist der Process von der Art, dass eine Abnahme der potentiellen Energie stattfindet, so wächst die actuelle Energie, es wird Wärme frei; im entgegengesetzten Falle tritt Wärmebindung ein. Diese Wärmemengen sind ein Mass der in beiden Fällen stattfindenden chemischen Wirkungen, sie sind nämlich äquivalent den positiven oder negativen Arbeiten der Affinitätskräfte bei den betrachteten Vorgängen.

Bei chemischen Verbindungen findet in der Regel Wärmeentwickelung und Volumsverkleinerung statt, und das Gegentheil bei Zersetzungen. Kommt auch noch ein äusserer Druck in Betracht, so entspricht die Wärmeentwickelung im ersteren Falle der Abnahme der potentiellen Energie mehr der aufgenommenen Arbeit des äusseren Druckes, und die Wärmebindung im zweiten Falle der Zunahme der potentiellen Energie mehr der bei der Volumsvergrösserung durch Ueberwindung des äusseren Druckes abgegebenen Arbeit.

(**Elektrolyse.**) Findet eine chemische Zerlegung durch einen elektrischen Strom, eine sogenannte Elektrolyse statt, so entspricht derselben nach dem Vorhergehenden für jede Zeiteinheit eine gewisse Wärmebindung Q, die durch eine äquivalente Arbeitsleistung EQ des Stromes bestritten wird, wobei $E = \frac{1}{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Diese Stromarbeit kann im Sinne der Gleichung 359 auch in der Form

$$EQ = J(V_1 - V_2) = JH$$

dargestellt werden, wobei J die Intensität des die Elektrolyse bewirkenden Stromes bezeichnet. Die Differenz $V_1 - V_2 = H$ stellt die Abnahme des Potentials vor, die durch den Vorgang

der Elektrolyse verursacht wird, sowie der Strom in den Elektrolyten (so nennt man bekanntlich den der Elektrolyse unterliegenden Körper) eintritt.

Mit Rücksicht auf die Faraday'schen Gesetze der Elektrolyse ergeben sich hieraus einige sehr bemerkenswerthe Folgerungen.

Fürs Erste ist das Gewicht M der in der Zeiteinheit zerlegten Menge eines Elektrolyten der Stromstärke proportional, also

$$M = cJ$$

wobei c eine Constante bedeutet. Offenbar ist aber andererseits die absorbirte Wärme $Q = \frac{JH}{E} = AHJ$ der zerlegten Menge M proportional oder

$$M = c' AHJ$$

wobei c' ebenfalls eine Constante ist. Hieraus folgt, dass, weil auch A constant ist, die Potentialdifferenz H gleichfalls constant sein muss. Man hat also für jeden Elektrolyten die Relation

$$H = \text{Const.}$$

d. h. die bei dem Eintritte des Stromes in die Zersetzungszelle in Folge der Elektrolyse stattfindende Potentialabnahme H ist für jeden Elektrolyten eine absolute Constante, die so wie sein Atomgewicht ein charakteristisches Merkmal seiner chemischen Beschaffenheit bildet.

Ein zweites Gesetz der Elektrolyse besagt, dass die durch denselben Strom in der Zeiteinheit zerlegten Gewichtsmengen einander chemisch äquivalent sind. Es ergibt sich hieraus der Begriff des elektrochemischen Aequivalentes η einer Substanz, nämlich der von der Stromeinheit in der Zeiteinheit zerlegten Gewichtsmenge des gegebenen Elektrolyten.

Man kann die Potentialdifferenz H auf diese Grösse zurückführen.

Der Strom J zerlegt in der Zeiteinheit die Menge $J\eta$ in Gewichtseinheiten oder $J\frac{\eta}{\alpha}$ in Aequivalenten, wenn α das Aequivalentgewicht bedeutet. Bezeichnet man ferner mit ϑ die sogenannte Aequivalentwärme des Elektrolyten, die Wärme also, die bei der Zerlegung eines Aequivalentes gebunden

wird, so ist $J\frac{\eta}{\alpha}\vartheta = Q$ die in der Zeiteinheit bei der vom Strome J vollbrachten Elektrolyse gebundene Wärme und $EJ\frac{\eta}{\alpha}\vartheta = EQ$ die entsprechende Stromarbeit JH. Es ist demnach, wenn wir $\frac{\eta}{\alpha} = f$ setzen,

$$H = E\frac{\eta}{\alpha}\vartheta = Ef\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 374)$$

Die chemische Stromeinheit zerlegt in der Zeiteinheit $F = \frac{1}{60.1870.1000.9}$ Aequivalente;*) andererseits ist dieselbe $\mu = 148\cdot 10^9$ mal grösser als die von Weber definirte mechanische Stromeinheit und $2\mu = 296\cdot 10^9$ mal grösser als die von uns in der Potentialtheorie zu Grunde gelegte Stromeinheit, die in der Zeiteinheit die positive Elektricitätsmenge $\frac{1}{2}$ durch den Querschnitt führt. Es ist somit $\frac{\eta}{\alpha} = f = \frac{F}{2\mu}\cdot$ Erwägt man endlich noch, dass wir in der Potentialtheorie die Gauss'sche Krafteinheit und daraus sich ergebende Arbeitseinheit zu Grunde gelegt haben, nach welcher $E = 424\cdot 10^{12}\cdot g$ ist, wenn man die Acceleration in Metern (bei uns 9,81) $= g$ setzt, — so wird $H = 424\cdot 10^{12}\cdot g\cdot\frac{F}{2\mu}\cdot\vartheta$ oder annähernd

$$H = 0{,}000014\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 375)$$

Für Kupfervitriol ist z. B. $\vartheta = 38950$, somit $H = 0{,}54$. Diese Grösse H ist, wie ersichtlich, von den Dimensionen, also vom Widerstande der vom Strome durchsetzten Schichte des Elektrolyten, somit von der Distanz und Oberfläche der Elektroden unabhängig. Anders verhält es sich mit einem weiteren Niveauverluste h des Potentials beim Durchgange des Stromes J durch den Elektrolyten vom Widerstande λ. Diese Potentialabnahme ist vermöge des Ohm'schen Gesetzes

$$h = J\lambda \quad \ldots\ldots \quad 376)$$

*) Ein Cubik-Centimeter Knallgas per Minute entspricht nämlich der Zerlegung von $\frac{1}{60.1870}$ Grammen Wasser per Secunde oder $\frac{1}{60.1870.1000}$ Kilo per Secunde. Das sind aber eben $\frac{1}{60.1870.1000.9}$ Aequivalente, wenn man die Aequivalentgewichte auf Kilo bezieht, so wie später die Aequivalentwärme.

Der gesammte Niveauverlust $H+h$ bei der Elektrolyse besteht daher aus einem constanten und veränderlichen Theile. Der erstere, H, der sofort beim Eintritte des Stromes in den Elektrolyten stattfindet, ist durch die Aequivalentwärme ϑ des Elektrolyten bestimmt; letzterer, der auf dem Wege von einer Elektrode zur anderen sich ergibt, ist der Stromintensität und dem Widerstande proportional.

(**Hydroketten.**) Im Gegensatze zu den soeben betrachteten elektrolytischen Vorgängen sind die chemischen Processe, welche sich in einer hydroelektrischen Kette vollziehen, von der Art, dass dabei mehr Wärme entwickelt als gebunden wird. Auf diesem Ueberschusse beruht eben der Gewinn jener Potentialdifferenz, welche der elektromotorischen Kraft der Kette entspricht, während bei der Elektrolyse, wie wir gesehen haben, eine gewisse Potentialdifferenz verloren geht.

Betrachten wir, um dies zu erläutern, zunächst den Vorgang in einer Daniell'schen Kette. Führen wir ferner die Bezeichnung ein, dass das Symbol $+(A, B)$ die bei der Verbindung der Körper A und B frei werdende, dagegen das Symbol $-(A, B)$ die bei der Zerlegung des Körpers (A, B) gebundene Wärme bedeute, also z. B. $+(Zn, SO_4)$ die Verbindungswärme bei der Bildung von Zinkvitriol, dagegen $-(Cu, SO_4)$ die bei der Zerlegung des Kupfervitriols absorbirte Wärmemenge, und zwar jedesmal auf ein Aequivalent bezogen (Aequivalentwärme). Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Processe in der Daniell'schen Kette folgendermassen darstellen:

$$+(Zn, SO_4) - (SO_4, H) + (H, SO_4) - (SO_4, Cu) = \Sigma\vartheta$$

indem wir mit $\Sigma\vartheta$ die algebraische Summe der den beschriebenen Processen entsprechenden (positiven und negativen) Aequivalentwärmen bezeichnen. Obige Summe reducirt sich im vorliegenden Falle, da das zweite und dritte Glied sich aufheben und die Ablagerung des ausgefällten Kupfers auf Kupfer keine weitere calorische Wirkung mehr bedingt, auf

$$+(Zn, SO_4) - (SO_4, Cu) = 66296 - 38950 = 27346;$$

das heisst: für jedes Aequivalent Zink, nämlich für je 32,5 Kilo Zink, die consumirt werden, werden $\Sigma\vartheta = 27346$ Calorien frei.

Bedeutet wieder f die Zahl der Aequivalente Zink, die für jede Stromeinheit in der Zeiteinheit consumirt werden,

somit $f\Sigma\vartheta$ die dabei gewonnene Wärme und $Ef\Sigma\vartheta$ die dabei gewonnene Arbeit, so ist $JEf\Sigma\vartheta$ der dem Strome J entsprechende Arbeitsgewinn, das heisst die Arbeit, welche in jeder Zeiteinheit durch die chemischen Processe in der Kette gewonnen werden muss, um eben den Strom J zu unterhalten.

Diese Arbeit kann dargestellt werden durch das Product der Stromstärke J mit einer entsprechenden Potentialdifferenz H, die also dann

$$H = Ef\Sigma\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 377$$

sein wird. Diese Potentialdifferenz wird in jedem Elemente gewonnen und wenn deren n zu einer Batterie verbunden sind, wird nH die gesammte durch die chemischen Processe in der Batterie gewonnene Niveaudifferenz darstellen. Dagegen findet in jedem Elemente, wenn dessen Widerstand mit λ bezeichnet wird, ein der Gleichung 376 entsprechender Niveauverlust $h = J\lambda$ statt. Die Potentialdifferenz an den Polen der n-elementigen Batterie reducirt sich daher auf

$$V_a - V_b = n(H - h) = n(Ef\Sigma\vartheta - J\lambda) \quad \ldots \quad 378)$$

Im Schliessungsbogen vom Widerstande λ' sinkt das Elektricitätsgewicht J wieder vom Potentialniveau V_a auf V_b und verrichtet dabei die Arbeit

$$J(V_a - V_b) = Jn(Ef\Sigma\vartheta - J\lambda) = J^2\lambda' \quad \ldots \quad 379)$$

vermöge Formel 361. Man gelangt daher zur Relation

$$\left.\begin{array}{c} nEf\Sigma\vartheta = J(n\lambda + \lambda') \\ \text{oder} \\ J = \dfrac{nEf\Sigma\vartheta}{n\lambda + \lambda'} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 380)$$

entsprechend dem Ausdrucke des Ohm'schen Gesetzes.

Es stellt daher $nEf\Sigma\vartheta$ die elektromotorische Kraft der Batterie und $Ef\Sigma\vartheta$ die eines einzelnen Elementes vor.

Sie ist der Grösse $\Sigma\vartheta$ proportional und diese hängt ihrerseits wieder von der chemischen Verschiedenheit der Metalle (z. B. Zink und Kupfer) ab, unter deren Einfluss die chemischen Processe in der Kette vor sich gehen. Hierauf beruht die Möglichkeit, die elektromotorische Kraft ebensowohl auf eine durch chemische Actionen als auch auf eine durch Contactwirkungen herbeigeführte Potentialdifferenz zurückzuführen.

Zur Versinnlichung des Gesagten diene noch Figur 140, einen aus vier Kupfer-Zink-Elementen bestehenden Becher-Apparat darstellend, dessen Pole durch einen Kupferdraht KK verbunden sind. An der Contactstelle des kupfernen Schliessungsbogens mit der ersten Zinkplatte stellen wir uns durch $b\beta$ die im ersten Elemente (auf Seite des Zinkes) eintretende Niveauerhebung H des Potentials von Bb auf $B\beta$ vor, von welcher beim Durchgange des Stromes J durch dieses Element der Betrag $h = J\lambda = ee'$ verloren geht. Eine zweite Niveauerhebung $H = e\eta$ entspricht dem zweiten Elemente, bei dessen Durchsetzung das Potential wieder von $E\eta$ auf Dd um

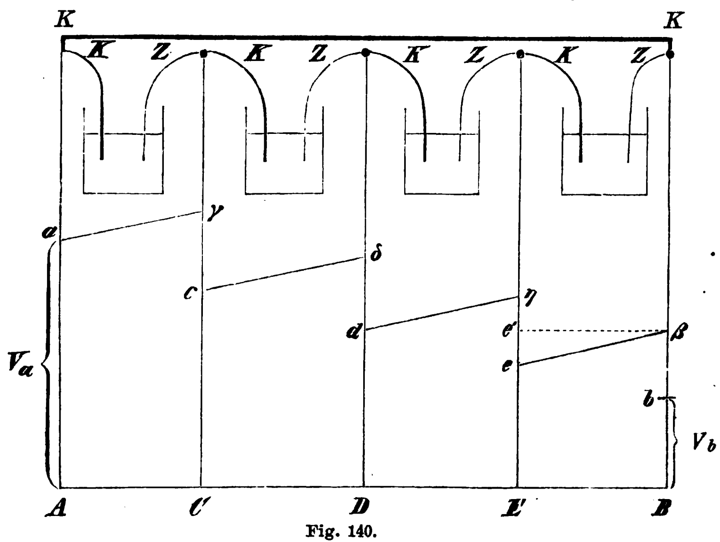


Fig. 140.

den Betrag h wie vorhin abfällt. In den vier Elementen ergibt sich demnach eine Niveauerhebung vom Betrage

$$4H - 4h = 4(H - h) = Aa - Bb = V_a - V_b$$

entsprechend der Formel 378.

Die Einheit der elektromotorischen Kräfte hängt, wie aus der Ohm'schen Formel unmittelbar ersichtlich ist, einerseits von der Stromeinheit und andererseits von der Widerstandseinheit ab. Wählt man beispielsweise die Einheiten von Jacobi und Siemens, so ist der Ausdruck für die Stromarbeit in Meterkilo für die Zeiteinheit nach Formel 364

$$a = kse$$

folglich $e = \frac{a_1}{k}$, wenn man unter a_1 die Arbeit der Stromeinheit $EF\Sigma\vartheta$ (nach den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen) versteht.

Man erhält demnach die Formel

$$e = \frac{1}{k} EF\Sigma\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 381)$$

Mit Rücksicht auf die bereits angegebenen Werthe (wobei E in Meterkilo also $= 424$ zu setzen ist) ergibt sich hieraus

$$e = 0{,}000477\,\Sigma\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 382)$$

Für die Daniell'sche Kette beträgt $\Sigma\vartheta$, wie bereits nachgewiesen, 27346. Die Formel liefert daher für diese Kette den Werth $e = 13$. Dieser Werth ist etwas grösser als der experimentell ermittelte, der jedenfalls näher an 12 als an 13 liegt. Ueberhaupt muss bemerkt werden, dass die aus den Aequivalentwärmen berechnete elektromotorische Kraft einer Hydrokette regelmässig etwas grösser als der beobachtete ausfällt, auch wenn letzterer an der stromlosen (compensirten) Kette gemessen worden ist. Obgleich sich wohl eine wahrscheinliche Erklärung dieses Umstandes geltend machen liesse, soll hier doch nicht weiter darauf eingegangen werden, da eine endgiltige Entscheidung dieser Frage noch nicht vorliegt.

(**Thermoketten.**) In einem geschlossenen Kreise von Leitern erster Ordnung kann, wie bekannt, vermöge der Gesetze der Spannungsreihe ein elektrischer Strom nicht stattfinden. Jeder der vorgenannten Leiter wird durch den Contact mit den benachbarten Leitern elektrisch. Jedem Leiter entspricht ein anderer Potentialwerth, dieser ist aber constant in der ganzen Ausdehnung des Leiters.

Der stromlose Zustand kann jedoch aufgehoben werden, indem man entweder den Kreis von Leitern erster Ordnung durch Einschaltung eines oder mehrerer Leiter von der zweiten Ordnung unterbricht; dies ist der Fall der Hydroketten, die wir bereits besprochen haben; — oder indem man die vorausgesetzte Bedingung der im ganzen Leiterkreise gleichen Temperatur aufhebt; dies ist der Fall der Thermoketten, die wir im Folgenden besprechen wollen.

Wir betrachten zwei Leiter erster Ordnung, z. B. zwei Metalle A und B Figur 141, welche bei m und n zusammen-

gefügt sind, was zum Zwecke thermoelektrischer Untersuchungen häufig durch Verlöthung bewerkstelligt wird. In Folge des Contactes tritt an jeder Berührungs- oder Löthstelle eine gewisse Potentialdifferenz auf. Wäre durchaus die gleiche Temperatur T vorhanden, so würde in der ganzen Ausdehnung des Leiters A ein gewisses Potential V_a und auf dem Leiter B ein Potential V_b herrschen. Wir setzen jedoch bei m und n ungleiche Temperaturen T und T' voraus und betrachten die daselbst auftretenden Potentialdifferenzen $V_b - V_a$ und $V_b' - V_a'$ als Functionen jener Temperaturen, wobei, wie ein für allemal bemerkt sein soll, stets die absoluten Temperaturen gemeint sind. Die soeben ausgesprochene Abhängigkeit entspricht einer von Clausius gemachten Annahme, nach welcher die Molecularbewegung, die wir Wärme nennen, die Ursache ist, welche die Scheidung der Elektricitäten an der betrachteten Contactstelle herbeizuführen sucht, während die elektrischen Kräfte das entgegengesetzte Bestreben der Wiedervereinigung der geschiedenen Elektricitäten äussern.

Fig. 141.

Zufolge der angenommenen Temperaturdifferenz ist die Möglichkeit eines elektrischen Stromes in dem betrachteten Schliessungskreise von Leitern erster Ordnung durch die Gesetze der Spannungsreihe nicht ausgeschlossen. Die Richtung eines solchen thermoelektrischen Stromes J wird einerseits von der Beschaffenheit der beiden Metalle A und B und andererseits davon abhängen, welche von beiden Löthstellen m und n die höhere Temperatur hat. Wir wollen eine solche Beschaffenheit der beiden Metalle voraussetzen, dass der Strom durch n von A nach B geht, wenn n die höhere Temperatur (T') besitzt.

In diesem Falle wird nach dem Ohm'schen Gesetze die Relation zutreffen müssen

$$J = \frac{V_b' - V_b}{\lambda_b} = \frac{V_a - V_a'}{\lambda_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 383)$$

... und λ_b die Widerstände von A und B bedeuten.
... $\lambda_a + \lambda_b = \lambda$, so kann man auch schreiben

$$J = \frac{(V_b' - V_b) + (V_a - V_a')}{\lambda}$$

oder

$$J = \frac{(V_b' - V_a') - (V_b - V_a)}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 384)$$

welchem Ausdrucke wir endlich noch die vereinfachte Gestalt

$$J = \frac{H' - H}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 385)$$

geben wollen.

Der Strom hat die angenommene Richtung, wenn von den beiden positiven Potentialdifferenzen H' grösser als H ist.

Beim Durchschreiten der Contactstelle m fällt in der Zeiteinheit die Elektricitätsmenge J vom Niveau V_b auf das kleinere V_a, wodurch lebendige Kraft im Betrage von

$$J(V_b - V_a) = JH$$

gewonnen und somit eine äquivalente Wärmemenge $Q = AJH$ frei gemacht wird. Soll die Temperatur T der Contactstelle constant bleiben, so muss daselbst durch einen Körper K in jeder Zeiteinheit jene Wärmemenge $Q = AJH$ abgeleitet werden. — Dagegen erfordert die Erhebung der Elektricitätsmenge J beim Durchschreiten der Contactstelle n vom Niveau V_a' auf das höhere V_b' in jeder Zeiteinheit eine Arbeit

$$J(V_b' - V_a') = JH',$$

also eine äquivalente Wärmemenge $Q' = AJH'$, die von einem Körper K' in jeder Zeiteinheit zugeliefert werden muss, um die Temperatur T' daselbst constant zu unterhalten.

Die Differenz $Q' - Q = AJ(H' - H)$ der zu- und abgeleiteten Wärmemengen ist äquivalent der Arbeit $J^2\lambda = J(H' - H)$ des Stromes J (Formel 385) im Schliessungskreise λ, in welchem die Wärmeentwickelung $AJ(H' - H)$ durch den Strom verursacht wird, wenn keine andere Stromarbeit (Elektrolyse u. s. w.) stattfindet.

Clausius hat die Analogie dieses Vorganges mit jenem beim Kreisprocesse einer thermodynamischen Maschine geltend gemacht und aus diesem Gesichtspunkte das Carnot'sche Theorem (siehe Formeln 224 bis 230 und Formel 245) auf den vorliegenden Fall angewendet. Mit Beibehaltung der hier erwähnten Bezeichnungen wäre das Verhältniss der in Strom-

arbeit verwandelten ($Q' - Q$) zur übergeführten (Q) Wärmemenge nach dem Carnot'schen Satze (Formel 225)

$$\frac{Q' - Q}{Q} = \frac{T' - T}{T}$$

wobei T' und T wieder die Temperaturen der Contactstellen sind, die Temperaturen also, bei welchen eben die Wärmemengen Q' und Q beziehungsweise zu- und abgeleitet worden sind.

Mit Rücksicht auf die angegebenen Werthe von Q' und Q ist $\frac{Q' - Q}{Q} = \frac{H' - H}{H}$ also $\frac{H' - H}{H} = \frac{T' - T}{T}$, woraus, wie leicht einzusehen ist, die Proportionalität von H mit T folgt, nämlich

$$H = kT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386)$$

wenn k einen constanten Coëfficienten vorstellt. Hieraus folgt weiter

$$H' - H = k(T' - T)$$

und mit Hilfe der Gleichung 385, wenn man $\frac{k}{\lambda} = c$ setzt,

$$J = c(T' - T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 387)$$

Die Anwendung des Carnot'schen Theorems führt demnach zu dem Satze, dass der thermoelektrische Strom der Temperaturdifferenz der Contactstellen proportional sei, ein Satz, dessen Giltigkeit innerhalb gewisser Grenzen bekanntlich schon längst experimentell constatirt worden ist.

Der Satz ist jedoch nicht allgemein giltig und die Abweichungen von demselben gehen mitunter so weit, dass bei Ueberschreitung gewisser Grenztemperaturen sogar eine Umkehrung der Stromrichtung eintritt, wie z. B. bei einer aus Kupfer und Eisen gebildeten Thermokette. Diese Abweichungen dürften nach Clausius wohl darauf zurückzuführen sein, dass bei sehr grosser Temperaturdifferenz der Contactstellen und somit auch der Theile eines und desselben Metalles, dieses letztere nicht mehr in ganzer Ausdehnung als homogen zu betrachten ist, sondern in seinen ungleich erwärmten Theilen, insofern dieselben moleculare Veränderungen erlitten haben, selbst Potentialdifferenzen darbieten kann, deren secundäre Wirkung jene Abweichungen vom Proportionalitätsgesetze herbeiführt.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich leicht verall-

gemeinern und auf eine zusammengesetzte Thermokette aus beliebigen Metallen A, B, C, D (Fig. 142) ausdehnen, welche

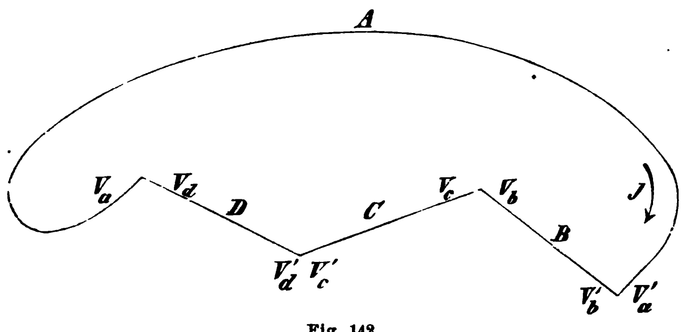


Fig. 142.

ungleich erwärmte Contactstellen haben mögen. Die an den Enden eines beliebigen Stabes B vorhandenen Potentialwerthe sind mit V_b und V_b' bezeichnet und in analoger Weise bei den anderen Metallen. Das Metall A bilde zugleich den Schliessungsbogen. Wir wollen annehmen, der Strom gehe in der Richtung B, C, D. Soll dies der Fall sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$J = \frac{V_b' - V_b}{\lambda_b} = \frac{V_c - V_c'}{\lambda_c} = \frac{V_d' - V_d}{\lambda_d} = \frac{V_a - V_a'}{\lambda_a}$$

oder

$$J = \frac{[(V_b' - V_a') + (V_d' - V_c')] - [(V_b - V_c) + (V_d - V_a)]}{\lambda} \quad . \ 388)$$

wenn wieder $\lambda = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d$ den Widerstand des Schliessungskreises bedeutet.

Der Zähler dieses Bruches stellt die Differenz der Summe vor der Potentialdifferenzen an den ungeraden und geraden Contactstellen. Diese Differenz muss positiv sein, wenn der Strom die angenommene Richtung haben soll.

Die Ausdehnung der Gleichung 388 auf eine grössere Anzahl von Metallen und ihre Anwendung auf den speciellen Fall, dass, wie bei den gewöhnlichen Thermosäulen, nur zweierlei Metalle in abwechselnder Aufeinanderfolge zusammengefügt sind, sind so unmittelbar einleuchtend, dass sie keiner näheren Erläuterung bedürfen.

(**Der Peltier'sche Versuch.**) Besonders bemerkenswerthe Erscheinungen treten auf, wenn durch die Löthstelle einer

Thermokette der Strom einer anderen Elektricitätsquelle geleitet wird. Man denke sich z. B. eine aus den Metallen A und B gebildete Kette in den Schliessungskreis einer Hydrokette eingeschaltet. Abgesehen von der Erwärmung $AJ^2\varrho$, welche der Strom J beim Widerstande ϱ unter allen Umständen in der Löthstelle verursachen muss, kommt hier noch eine andere Wirkung in Betracht.

Es seien V_b und V_a die Potentialwerthe zu beiden Seiten der Löthstelle und zwar V_b auf Seite des Metalles B und V_a auf Seite des Metalles A. Ist nun $V_b > V_a$ und geht der Strom von B nach A, so findet ein Fallen des Elektricitätsgewichtes J vom Niveau V_b auf V_a statt, was eine weitere Wärmeentwickelung $AJ(V_b - V_a)$ bedingt, welche zu der dem Joule'schen Gesetze entsprechenden $AJ^2\varrho$ hinzukommt.

Dagegen hat man es mit einer Erhebung des Elektricitätsgewichtes J von V_a auf V_b zu thun, sobald der Strom der Hydrokette von A nach B durch die Löthstelle geschickt wird. Diese Erhebung beansprucht eine Wärmebindung vom Betrage $AJ(V_b - V_a)$, die, solange $AJ(V_b - V_a) > AJ^2\varrho$ ist, eine Abkühlung der Löthstelle bewirken muss. Darin besteht das Peltier'sche Phänomen, welches man beobachten kann, so lange der Strom der Hydrokette den durch die Gleichung

$$J\varrho = V_b - V_a \quad \ldots\ldots \quad 389)$$

bestimmten Grenzwerth noch nicht erreicht hat.

Wir haben bei der Erläuterung des in Fig. 141 dargestellten Vorganges einer von Clausius ausgesprochenen Annahme erwähnt, nach welcher wir es an der betrachteten Contactstelle einerseits mit der elektromotorischen Wirkung der Wärme zu thun haben und andererseits mit der im entgegengesetzten Sinne wirkenden Anziehung der Elektricitäten, durch deren Scheidung eben die Potentialdifferenz $V_b - V_a$ an der Contactstelle zu Stande kommt.

Clausius bemerkt, dass dieser Zustand in der Uebergangsschichte mit dem eines in ausdehnbarer Hülle befindlichen Gasquantums verglichen werden könne, welches durch einen äusseren Druck zusammengehalten wird, während die Wärmebewegung seiner Molecüle es auszudehnen sucht. Wenn man den äusseren Druck etwas vergrössert oder verkleinert und dadurch das Gas weiter zusammendrückt oder sich ausdehnen

lässt, so thut oder erleidet der äussere Druck dabei eine gewisse Arbeit und zugleich wird in dem Gase eine äquivalente Wärmemenge erzeugt oder vernichtet. Der letztere Vorgang erläutert die Abkühlung beim Peltier'schen Versuche. Der durch die Löthstelle geleitete Strom wirkt dem Vereinigungsbestreben der durch die Wärme geschiedenen Elektricitäten entgegen, die elektrischen Kräfte erleiden also in diesem Falle eine Arbeit und es wird Wärme gebunden.

Die Auffassung ist wohl geeignet, das Peltier'sche Phänomen einer befriedigenden Erklärung zugänglicher zu machen, doch ist eine solche bis jetzt noch nicht völlig gelungen. Die Erfahrung lehrt z. B., dass die Peltier'sche Erscheinung viel stärker bei Wismuth und Antimon auftritt, als bei Kupfer und Zink, obgleich die letzteren Metalle nach elektroskopischen Versuchen eine viel grössere Potentialdifferenz an der Contactstelle aufweisen. Eine zweifellose Aufklärung dieses Widerspruches ist noch nicht gegeben worden.*)

Leitet man den Strom einer Hydrokette durch eine gewöhnliche Thermosäule, so durchsetzt derselbe die aufeinander folgenden Löthstellen abwechselnd vom niedereren zum höheren Potentialniveau und umgekehrt. Es findet in Folge dessen z. B. in den ungeraden Löthstellen Abkühlung, in den geraden Erwärmung statt. Durch diese Temperaturdifferenz ist die Thermosäule befähigt, nach Aufhebung des Stromes der Hydrokette, einen entgegengesetzten Entladungsstrom abzugeben, der als Mass der calorischen Effecte in den Löthstellen dienen kann. Zu eclatanten Versuchen dieser Art ist die sehr wirksame Thermosäule von Noë vorzüglich geeignet.

Die Anwendungen der Potentialtheorie im Gebiete der Elektrodynamik liegen nicht mehr innerhalb der durch den Titel dieses Buches vorgezeichneten Grenzen.

---

*) Eine sehr beachtenswerthe neuere Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen (beruhend auf der Annahme, dass bei einem Wärmestrome eine Mitführung von Elektricität stattfindet und umgekehrt) hat F. Kohlrausch entwickelt (1874).

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

Berichtigung.

Seite 262 Zeile 7 v. u. statt: Taite lies: Tait.